ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

Biên soạn: GV.Đỗ Thị Tuyết Hoa

BÀI GIẢNG MÔN PHƯƠNG PHÁP TÍNH

(Dành cho sinh viên khoa Công nghệ thông tin)

(TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ)

ĐÀ NẴNG, NĂM 2007

MỤC LỤC

CHƯƠNG I NHẬP MÔN

1.1. Giới thiệu môn phương pháp tính

Phương pháp tính là bộ môn toán học có nhiệm vụ giải đến kết quả bằng số cho các bài toán, nó cung cấp các phương pháp giải cho những bài toán trong thực tế mà không có lời giải chính xác. Môn học này là cầu nối giữa toán học lý thuyết và các ứng dụng của nó trong thực tế.

Trong thời đại tin học hiện nay thì việc áp dụng các phương pháp tính càng trở nên phổ biến nhằm tăng tốc độ tính toán.

1.2. Nhiệm vụ môn học

- Tìm ra các phương pháp giải cho các bài toán gồm: phương pháp (PP) đúng và phương pháp gần đúng.

  + Phương pháp: chỉ ra kết quả dưới dạng một biểu thức giải tích cụ thể.

  + Phương pháp gần đúng: thường cho kết quả sau một quá trình tính lặp theo một quy luật nào đó, nó được áp dụng trong trường hợp bài toán không có lời giải đúng hoặc nếu có thì quá phức tạp.

- Xác định tính chất nghiệm

- Giải các bài toán về cực trị

- Xấp xỉ hàm: khi khảo sát, tính toán trên một hàm f(x) khá phức tạp, ta có thể thay hàm f(x) bởi hàm g(x) đơn giản hơn sao cho $g(x) \cong f(x)$. Việc lựa chọn g(x) được gọi là phép xấp xỉ hàm

- Đánh giá sai số : khi giải bài toán bằng phương pháp gần đúng thì sai số xuất hiện do sự sai lệch giữa giá trị nhận được với nghiệm thực của bài toán. Vì vậy ta phải đánh giá sai số để từ đó chọn ra được phương pháp tối ưu nhất

1.3. Trình tự giải bài toán trong phương pháp tính

- Khảo sát, phân tích bài toán

- Lựa chọn phương pháp dựa vào các tiêu chí sau:

  + Khối lượng tính toán ít

  + Đơn giản khi xây dựng thuật toán

  + Sai số bé

+ Khả thi

- Xây dựng thuật toán: sử dụng ngôn ngữ giả hoặc sơ đồ khối (càng mịn càng tốt)

- Viết chương trình: sử dụng ngôn ngữ lập trình (C, C++, Pascal, Matlab,…)

- Thực hiện chương trình, thử nghiệm, sửa đổi và hoàn chỉnh.

CHƯƠNG II SAI SỐ

2.1. Khái niệm

Giả sử x là số gần đúng của x* (x* : số đúng),

Khi đó $\Delta = |x - x^*|$ gọi là sai số thực sự của x

Vì không xác định được Δ nên ta xét đến 2 loại sai số sau:

- Sai số tuyệt đối: Giả sử $\exists \Delta x > 0$ du be sao cho $|x - x^*| \le \Delta x$

Khi đó Δx gọi là sai số tuyệt đối của x

- Sai số tương đối : $\delta x = \dfrac{\Delta x}{|x|}$

2.2. Các loại sai số

Dựa vào nguyên nhân gây sai số, ta có các loại sau:

- Sai số giả thiết: xuất hiện do việc giả thiết bài toán đạt được một số điều kiện lý tưởng nhằm làm giảm độ phức tạp của bài toán.
- Sai số do số liệu ban đầu: xuất hiện do việc đo đạc và cung cấp giá trị đầu vào không chính xác.
- Sai số phương pháp : xuất hiện do việc giải bài toán bằng phương pháp gần đúng.
- Sai số tính toán : xuất hiện do làm tròn số trong quá trình tính toán, quá trình tính càng nhiều thì sai số tích luỹ càng lớn.

2.3. Sai số tính toán

Giả sử dùng n số gần đúng $x_i (i = \overline{1,n})$ để tính đại lượng y,

với $y = f(x_i) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$

Trong đó : f là hàm khả vi liên tục theo các đối số x_i

Khi đó sai số của y được xác định theo công thức sau:

Sai số tuyệt đối: $\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \left| \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$

Sai số tương đối: $\delta y = \sum_{i=1}^{n} \left| \dfrac{\partial \ln f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$

- Trường hợp f có dạng tổng: $y = f(x_i) = \pm x_1 \pm x_2 \pm ...... \pm x_n$

$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| = 1 \quad \forall i$ suy ra $\boxed{\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i}$

- Trường hợp f có dạng tích:

$$y = f(x_i) = \frac{x_1 * x_2 * \ldots * x_k}{x_{k+1} * \ldots * x_n}$$

$$\ln f = \ln\frac{x_1.x_2..x_m}{x_{m+1}.....x_n} = (\ln x_1 + \ln x_2 + \ldots + \ln x_m) - (\ln x_{m+1} + \ldots + \ln x_n)$$

$$\left|\frac{\partial \ln f}{\partial x_i}\right| = \frac{1}{|x_i|} \quad \forall i \quad \Rightarrow \quad \delta_y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta x_i}{|x_i|} = \sum_{i=1}^{n} \delta x_i$$

Vậy $\boxed{\delta_y = \sum_{i=1}^{n} \delta x_i}$

- Trường hợp f dạng luỹ thừa: $y = f(x) = x^{\alpha} (\alpha > 0)$

$$\ln y = \ln f = \alpha \ln x$$

$\left|\frac{\partial \ln f}{\partial x}\right| = \frac{\alpha}{|x|}$ Suy ra $\boxed{\delta y = \alpha.\frac{\Delta x}{|x|} = \alpha\delta x}$

Ví dụ. Cho $a \approx 10.25;\ b \approx 0.324;\ c \approx 12.13$

Tính sai số của:

$$y_1 = \frac{a^3}{b\sqrt{c}}; \qquad y_2 = a^3 - b\sqrt{c}$$

<u>Giải</u> $\delta y_1 = \delta(a^3) + \delta(b\sqrt{c}) = 3\delta a + \delta b + \frac{1}{2}\delta c$

$$= 3\frac{\Delta a}{|a|} + \frac{\Delta b}{|b|} + \frac{1}{2}\frac{\Delta c}{|c|}$$

$$\Delta y_2 = \Delta(a^3) + \Delta(b\sqrt{c}) = \left|a^3\right|\delta(a^3) + \left|b\sqrt{c}\right|\delta(b\sqrt{c})$$

$$\Delta y_2 = 3\left|a^3\right|\frac{\Delta a}{|a|} + b\sqrt{c}\left(\frac{\Delta b}{|b|} + \frac{1}{2}\frac{\Delta c}{|c|}\right)$$

CHƯƠNG III TÍNH GIÁ TRỊ HÀM

3.1. Tính giá trị đa thức. Sơ đồ Hoocner

3.1.1. Đặt vấn đề

Cho đa thức bậc n có dạng tổng quát :

$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ (a#0)

Tính giá trị đa thức p(x) khi x = c (c: giá trị cho trước)

3.1.2. Phương pháp

Áp dụng sơ đồ Hoocner nhằm làm giảm đi số phép tính nhân (chỉ thực hiện n phép nhân), phương pháp này được phân tích như sau:

$\mathbf{p(x) = (...((a_0x + a_1)x + a_2)x + ... + a_{n-1})x + a_n}$

⇨ $p(c) = \mathbf{(...((a_0c + a_1)c + a_2)c + ... + a_{n-1})c + a_n}$

⇨ Đặt $p_0 = a_0$

$p_1 = a_0c + a_1 = p_0c + a_1$

$p_2 = p_1c + a_2$

....

$p_n = p_{n-1}c + a_n = p(c)$

Sơ đồ Hoocner

a_0	a_1	a_2	....	a_{n-1}	a_n
	p_0*c	p_1*c	....	$p_{n-2}*c$	$p_{n-1}*c$
p_0	p_1	p_2	...	p_{n-1}	$p_n= p(c)$

Vd: Cho $p(x) = x_6 + 5x^4 + x_3 - x - 1$ Tính p(-2)

Áp dụng sơ đồ Hoocner:

1	0	-5	2	0	-1	-1
	-2	4	2	-8	16	-30
1	-2	-1	4	-8	15	-31

Vậy p(-2) = -31

3.1.3. Thuật toán

+ Nhập vào: n, c, các hệ số a_i $(i = \overline{0,n})$

+ Xử lý: Đặt $p = a_0$

Lặp $i = 1 \rightarrow n$: $p = p * c + a_i$

+ Xuất kết quả: p

3.1.4. Chương trình

```
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
main ( )
{ int i, n; float c, p, a [10];
clrsr ();
printf (“Nhap gia tri can tinh : ”); scanf (“%f”,&c);
printf (“Nhap bac da thuc : ”); scanf (“%d”,&n);
printf (“Nhap các hệ số: \n”);
for (i = 0, i<=n; i++) {
printf (“a[%d] = ”, i); scanf (“%f”, &a[i]);
}
p = a[0];
for (i=1, i<=n; i++) p = p*c + a[i];
printf (“Gia tri cua da thuc : %.3f”, p);
getch ( );
}
```

3.2. Sơ đồ Hoocner tổng quát

3.2.1. Đặt vấn đề

Cho đa thức bậc n có dạng tổng quát :

$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n \quad (a_0 \# 0) \qquad (1)$

Xác định các hệ số của p(y + c), trong đó y: biến mới, c: giá trị cho trước

3.2.2. Phương pháp

Giả sử: $p(y+c) = b_0y^n + b_1y^{n-1} + ... + b_{n-1}y + b_n \qquad (2)$

Như vậy ta phải xác định các hệ số $b_i \quad (i = \overline{0, n})$

- Xác định b_n

  Xét y=0, từ (2) => $p(c) = b_n$

- Xác định b_{n-1}

  $p(x) = (x-c)\, p_1(x) + p(c)$ (1')

  Trong đó $p_1(x)$: đa thức bậc n-1

  $p(y+c) = y(b_0 y^{n-1} + b_1 y^{n-2} + ... + b_{n-2} y + b_{n-1}) + b_n$

  Đặt x=y+c ta có:

  $p(x) = (x-c)(b_0 y^{n-1} + b_1 y^{n-2} + ... + b_{n-2} y + b_{n-1}) + b_n$ (2')

  Đồng nhất (1') & (2') suy ra:

  $p_1(x) = b_0 y^{n-1} + b_1 y^{n-2} + ... + b_{n-2} y + b_{n-1}$

  Xét y = 0, $p_1(c) = b_{n-1}$

  Tương tự ta có: $b_{n-2} = p_2(c), \ldots, b_1 = p_{n-1}(c)$

  Vậy $b_{n-i} = p_i(c)$ (i = 0-->n) , $b_0 = a_0$

  Với $p_i(c)$ là giá trị đa thức bậc n-i tại c

Sơ đồ Hoocner tổng quát:

a_0	a_1	a_2	....	a_{n-1}	a_n
	$p_0 * c$	$p_1 * c$	....	$p_{n-2} * c$	$p_{n-1} * c$
p_0	p_1	p_2	...	p_{n-1}	$p_n = p(c) = b_n$
	$p_0' * c$	$p_1' * c$	....	$p_{n-2}' * c$	
p_0	p_1'	p_2'	...	$p_{n-1}' = p_1(c) = b_{n-1}$	
…	...				

Ví dụ: Cho $p(x) = 2x^6 + 4x^5 - x^2 + x + 2$. Xác định p(y-1)

Áp dụng sơ đồ Hoocner tổng quát :

p(x)	2	4	0	0	-1	1	2
		-2	-2	2	-2	3	-4
$p_1(x)$	2	2	-2	2	-3	4	-2
		-2	0	2	-4	7	
$p_2(x)$	2	0	-2	4	-7	11	
		-2	2	0	-4		
$p_3(x)$	2	-2	0	4	-11		
		-2	4	-4			
$p_4(x)$	2	-4	4	0			
		-2	6				
$p_5(x)$	2	-6	10				
		-2					
	2	-8					

Vậy $p(y-1) = 2y^6 - 8y^5 + 10y^4 - 11y^2 + 11y - 2$

3.2.3. Thuật toán

- Nhập n, c, a [i] $(i = \overline{0,n})$
- Lặp $k = n \rightarrow 1$

    Lặp $i = 1 \rightarrow k$: $a_i = a_{i-1} * c + a_i$
- Xuất a_i $(i = \overline{0,n})$

3.3. Khai triển hàm qua chuỗi Taylo

Hàm f(x) liên tục, khả tích tại x_0 nếu ta có thể khai triển được hàm f(x) qua chuỗi Taylor như sau:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!}$$

khi $x_0 = 0$, ta có khai triển Macloranh:

$$f(x) \approx f(0) + + \frac{f'(0)x}{1!} + \ldots + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$$

Ví dụ: $\text{Cosx} \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$

BÀI TẬP

1. Cho đa thức $p(x) = 3x^5 + 8x^4 - 2x^2 + x - 5$
   a. Tính p(3)
   b. Xác định đa thức p(y-2)
2. Khai báo (định nghĩa) hàm trong C để tính giá trị đa thức p(x) bậc n tổng quát theo sơ đồ Hoocner
3. Viết chương trình (có sử dụng hàm ở câu 1) nhập vào 2 giá trị a, b.
   Tính p(a) + p(b)
4. Viết chương trình nhập vào 2 đa thức $p_n(x)$ bậc n, $p_m(x)$ bậc m và giá trị c. Tính $p_n(c) + p_m(c)$
5. Viết chương trình xác định các hệ số của đa thức p(y+c) theo sơ đồ Hoocner tổng quát
6. Khai báo hàm trong C để tính giá trị các hàm e^x, sinx, cosx theo khai triển Macloranh.

CHƯƠNG IV GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH

4.1. Giới thiệu

Để tìm nghiệm gần đúng của phương trình f(x) = 0 ta tiến hành qua 2 bước:

- Tách nghiệm: xét tính chất nghiệm của phương trình, phương trình có nghiệm hay không, có bao nhiêu nghiệm, các khoảng chứa nghiệm nếu có. Đối với bước này, ta có thể dùng phương pháp đồ thị, kết hợp với các định lý mà toán học hỗ trợ.

- Chính xác hoá nghiệm: thu hẹp dần khoảng chứa nghiệm để hội tụ được đến giá trị nghiệm gần đúng với độ chính xác cho phép. Trong bước này ta có thể áp dụng một trong các phương pháp:

+ Phương pháp chia đôi

+ Phương pháp lặp

+ Phương pháp tiếp tuyến

+ Phương pháp dây cung

4.2. Tách nghiệm

*** Phương pháp đồ thị:**

Trường hợp hàm f(x) đơn giản

- Vẽ đồ thị f(x)

- Nghiệm phương trình là hoành độ giao điểm của f(x) với trục x, từ đó suy ra số nghiệm, khoảng nghiệm.

Trường hợp f(x) phức tạp

- Biến đổi tương đương f(x)=0 <=> g(x) = h(x)

- Vẽ đồ thị của g(x), h(x)

- Hoành độ giao điểm của g(x) và h(x) là nghiệm phương trình, từ đó suy ra số nghiệm, khoảng nghiệm.

**** Định lý 1:***

Giả sử f(x) liên tục trên (a,b) và có f(a)*f(b)<0. Khi đó trên (a,b) tồn tại một số lẻ nghiệm thực $x \in (a,b)$ của phương trình f(x)=0. Nghiệm là duy nhất nếu f'(x) tồn tại và không đổi dấu trên (a,b).

Ví dụ 1. Tách nghiệm cho phương trình: $x^3 - x + 5 = 0$

<u>Giải:</u> $f(x) = x^3 - x + 5$

$f'(x) = 3x^2 - 1$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1/\sqrt{3}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-1/\sqrt{3}$		$1/\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗		$y_{CĐ}<0$	↘	CT	↗	$+\infty$

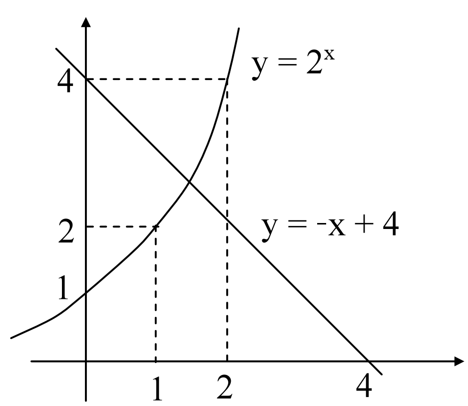
Từ bảng biến thiên, phương trình có 1 nghiệm $x < -1/\sqrt{3}$

$f(-1)^* f(-2) < 0$, vậy phương trình trên có 1 nghiệm $x \in (-2, -1)$

Ví dụ 2. Tách nghiệm cho phương trình sau: $2^x + x - 4 = 0$

<u>Giải:</u> $2^x + x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2^x = -x + 4$

Áp dụng phương pháp đồ thị:



Từ đồ thị => phương trình có 1 nghiệm $x \in (1, 2)$

*** *Định lý 2*:** (Sai số)

Giả sử α là nghiệm đúng và x là nghiệm gần đúng của phương trình f(x)=0, cùng nằm trong khoảng nghiệm [a,b] và f '(x) = ≥ m ≥ 0 khi a ≤ x ≤ b. Khi đó $|x-\alpha| \leq \frac{|f(x)|}{m}$

Ví du 3. Cho nghiệm gần đúng của phương trình $x^4 - x - 1 = 0$ là 1.22. Hãy ước lượng sai số tuyệt đối là bao nhiêu?

Giải: $f(x) = f(1.22) = 1.22^4 - 1.22 - 1 = -0,0047 < 0$

$f(1.23) = 0.588 > 0$

$\Rightarrow$ nghiệm phương trình $x \in (1.22 , 1.23)$

$f'(x) = 4x^3 - 1 \geq 4*1.22^3 - 1 = 6.624 = m \quad \forall x \in (1.22 , 1.23)$

Theo định lý 2 : $\Delta x = 0.0047/6.624 = 0.0008$ (vì $|x - \alpha| \leq 0.008$)

3.3. Tách nghiệm cho phương trình đại số

Xét phương trình đại số: $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ (1)

Định lý 3:

Cho phương trình (1) có $m_1 = \max\{|a_i|\}$ $i = \overline{1,n}$

$m_2 = \max\{|a_i|\}$ $i = \overline{0,n-1}$

Khi đó mọi nghiệm x của phương trình đều thoả mãn:

$$x_1 = \frac{|a_n|}{m_2 + |a_n|} \leq |x| \leq 1 + \frac{m_1}{|a_0|} = x_2$$

Định lý 4:

Cho phương trình (1) có $a_0 > 0$, a_m là hệ số âm đầu tiên. Khi đó mọi nghiệm dương của phương trình đều $\leq N = 1 + \sqrt[m]{a/a_0}$,

với $a = \max\{|a_i|\}$ $i = \overline{0,n}$ sao cho $a_i < 0$.

Ví dụ 4. Cho phương trình: $5x^5 - 8x^3 + 2x^2 - x + 6 = 0$

Tìm cận trên nghiệm dương của phương trình trên

Giải: Ta có $a_2 = -8$ là hệ số âm đầu tiên, nên $m = 2$

$a = \max(8, 1) = 8$

Vậy cận trên của nghiệm dương: $N = 1 + \sqrt{8/5}$

*** *Định lý 5:***

Cho phương trình (1), xét các đa thức:

$$\varphi_1(x) = x^n f(1/x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

$$\varphi_2(x) = f(-x) = (-1)^n (a_0 x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \ldots + (-1)^n a_n)$$

$$\varphi_3(x) = x^n f(-1/x) = (-1)^n (a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} - \ldots + (-1)^n a_0)$$

Giả sử N_0, N_1, N_2, N_3 là cận trên các nghiệm dương của các đa thức f(x), $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$. Khi đó mọi nghiệm dương của phtrình (1) đều nằm trong khoảng **[$1/N_1$, N_0]** và mọi nghiệm âm nằm trong khoảng **[$-N_2$,$-1/N_3$]**

Ví dụ 5. Xét phương trình

$$3x^2 + 2x - 5 = 0 \quad \rightarrow N_0 = 1 + \sqrt{5/3} \quad \text{(định lý 4)}$$

$$\varphi_1(x) = 3 + 2x - 5x^2 \rightarrow N_1 \text{ không tồn tại } (a_0 < 0)$$

$$\varphi_2(x) = 3x^2 - 2x - 5 \rightarrow N_2 = 1 + 5/3 \quad \text{(định lý 4)}$$

$$\varphi_3(x) = 3 - 2x - 5x^2 \rightarrow N_3 \text{ không tồn tại } (a_0 < 0)$$

Vậy: mọi nghiệm dương $x < 1 + \sqrt{5/3}$

mọi nghiệm âm $x > -(1 + 5/3) = -8/3$

4.4. Chính xác hoá nghiệm

4.4.1. Phương pháp chia đôi

a. Ý tưởng

Cho phương trình f(x) = 0, f(x) liên tục và trái dấu tại 2 đầu [a,b]. Giả sử f(a) < 0, f(b) < 0 (nếu ngược lại thì xét –f(x)=0). Theo định lý 1, trên [a,b] phương trình có ít nhất 1 nghiệm μ.

Cách tìm nghiệm μ:

Đặt $[a_0, b_0] = [a, b]$ và lập các khoảng lồng nhau $[a_i, b_i]$ (i=1, 2, 3, …)

$$[a_i, b_i] = \begin{cases} [a_i, (a_{i-1} + b_{i-1})/2] & \text{nếu } f((a_{i-1} + b_{i-1})/2) > 0 \\ \\ [(a_{i-1} + b_{i-1})/2, b_i] & \text{nếu } f((a_{i-1} + b_{i-1})/2) < 0 \end{cases}$$

Như vậy:

- Hoặc nhận được nghiệm đúng ở một bước nào đó:

$$\mu = (a_{i-1} + b_{i-1})/2 \quad \text{nếu } f((a_{i-1} + b_{i-1})/2) = 0$$

- Hoặc nhận được 2 dãy $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$, trong đó:

$\{a_n\}$: là dãy đơn điệu tăng và bị chặn trên

$\{b_n\}$: là dãy đơn điệu giảm và bị chặn dưới

nên $\exists \lim\limits_{n\to\alpha} a_n = \lim b_n = \mu$ là nghiệm phương trình

Ví dụ 6. Tìm nghiệm phương trình: $2^x + x - 4 = 0$ bằng ppháp chia đôi

Giải:

- Tách nghiệm: phương trình có 1 nghiệm $x \in (1,2)$

- Chính xác hoá nghiệm: áp dụng phương pháp chia đôi (f(1) < 0)

Bảng kết quả:

a_n	b_n	$f(\frac{a_n + b_n}{2})$
1	2	+
	1.5	-
1.25		-
1.375		+
	1.438	+
	1.406	+
	1.391	-
1.383		+
	1.387	-
1.385		-
1.386	1.387	

$\lim\limits_{n\to\alpha} a_n = \lim\limits_{n\to 11} b_n = 1.386$

Kết luận: Nghiệm của phương trình: $x \approx 1.386$

b. Thuật toán

- Khai báo hàm f(x) (hàm đa thức, hàm siêu việt)

- Nhập a, b sao cho f(a)<0 và f(b)>0

- Lặp

c = (a+b)/2

nếu $f(c) > 0 \rightarrow b = c$

ngược lại a = c

trong khi ($|f(c)| > \varepsilon$) /* $|a - b| > \varepsilon$ và f(c) != 0 */

- Xuất nghiệm: c

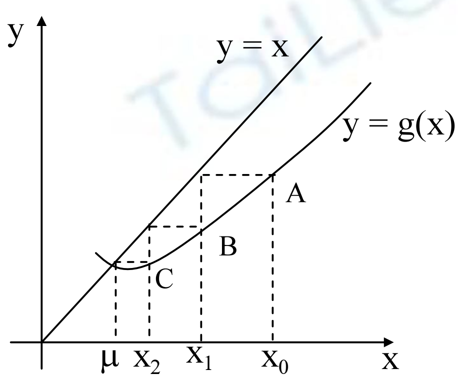
4.4.2. Phương pháp lặp

a. Ý tưởng

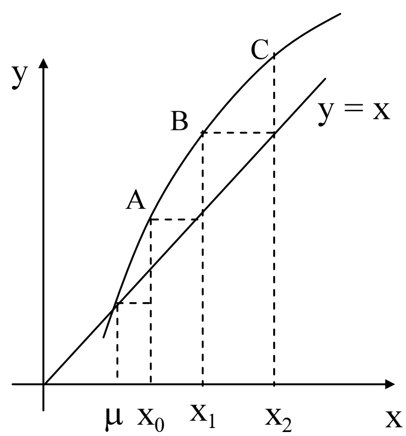
Biến đổi tương đương: f(x) = 0 <=> x = g(x)
Chọn giá trị ban đầu $x_0 \in$ khoảng nghiệm (a,b),
tính $x_1 = g(x_0)$, $x_2 = g(x_1)$, … , $x_k = g(x_{k-1})$
Như vậy ta nhận được dãy $\{x_n\}$, nếu dãy này hội tụ thì tồn tại giới hạn
$\lim_{n\to\infty} x_n = \eta$ (là nghiệm phương trình)

b. Ý nghĩa hình học

Hoành độ giao điểm của 2 đồ thị y=x và y=g(x) là nghiệm phương trình



Hình a



Hình b

Trường hợp hình a: hội tụ đến nghiệm μ
Trường hợp hình a: không hội tụ đến nghiệm μ (phân ly nghiệm)

Sau đây ta xét định lý về điều kiện hôi tụ đến nghiệm sau một quá trình lặp

Định lý (điều kiện đủ)

Giả sử hàm g(x) xác định, khả vi trên khoảng nghiệm [a,b] và mọi giá trị g(x) đều thuộc [a,b]. Khi đó nếu $\exists$ q > 0 sao cho $|g'(x)| \le q < 1$ $\forall x$ (a,b) thì:

+ Quá trình lặp hội tụ đến nghiệm không phụ thuộc vào $x_0 \in [a,b]$

+ Giới hạn $\lim_{n\to\infty} x_n = \eta$ là nghiệm duy nhất trên (a, b)

Lưu ý:

- Định lý đúng nếu hàm g(x) xác định và khả vi trong $(-\infty,+\infty)$, trong khi đó điều kiện định lý thoả mãn.

- Trong trường hợp tổng quát, để nhận được xấp xỉ x_n vớI độ chính xác ε cho trước, ta tiến hành phép lặp cho đến khi 2 xấp xỉ liên tiếp thoả mãn:

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| \le \frac{1-q}{q}\varepsilon$$

Ví dụ 7. Tìm nghiệm: $x^3 - x - 1 = 0$ bằng phương pháp lặp

<u>Giải:</u> - Tách nghiệm: phương trình có một nghiệm $\in (1,2)$

- Chính xác hoá nghiệm:

$$x^3 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = x^3 - 1; \quad x = \frac{x+1}{x^2}; \quad x = \sqrt[3]{x+1}$$

Chọn $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$

$$g'(x) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{(x+1)^2}} < 1 \qquad \forall x \in (1,2)$$

=> áp dụng phương pháp lặp (chọn $x_0 = 1$)

x	$g(x) = \sqrt[3]{x+1}$
1	1.260
1.260	1.312
1.312	1.322
1.322	1.324
1.324	1.325
1.325	1.325

$\left|x_4 - x_5\right| < \varepsilon = 10^{-3}$

Nghiệm phương trình $x \approx 1.325$

c. Thuật toán

- Khai báo hàm g(x)
- Nhập x
- Lặp: y= x

  x = g(x)

  trong khi $\left|x - y\right| > \varepsilon$
- Xuất nghiệm: x (hoặc y)