BỘ GIAO THÔNG VẬN TẢI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC HÀNG HẢI
BỘ MÔN: KHOA HỌC MÁY TÍNH
KHOA: CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

BÀI GIẢNG

Phương pháp tính

TÊN HỌC PHẦN : **Phương pháp tính**
MÃ HỌC PHẦN : 17201
TRÌNH ĐỘ ĐÀO TẠO : **ĐẠI HỌC CHÍNH QUY**
DÙNG CHO SV NGÀNH : **CÔNG NGHỆ THÔNG TIN**

HẢI PHÒNG - 2008

11.1. **Tên học phần:** Phương pháp tính **Loại học phần:** 2
Bộ môn phụ trách giảng dạy: Khoa học máy tính **Khoa phụ trách:** CNTT
Mã học phần: 17201 **Tổng số TC:** 3

TS tiết	Lý thuyết	Thực hành/Xemina	Tự học	Bài tập lớn	Đồ án môn học
60	45	15	0	0	0

Điều kiện tiên quyết:

Sinh viên phải học xong các học phần sau mới được đăng ký học phần này:
Đại số; Giải tích 1; Giải tích 2

Mục tiêu của học phần:

Trang bị cho sinh viên các kiến thức cần thiết trong việc giải số các bài toán ứng dụng thường gặp trong kỹ thuật và tăng cường khả năng lập trình của sinh viên cho các bài toán đó.

Nội dung chủ yếu

Trình bày các khái niệm sai số; cách tính gần đúng nghiệm của phương trình; cách tính gần đúng đạo hàm và tích phân; phép nội suy hàm và giải gần đúng phương trình vi phân thường.

Nội dung chi tiết của học phần:

TÊN CHƯƠNG MỤC	PHÂN PHỐI SỐ TIẾT				
	TS	**LT**	**TH/Xemina**	**BT**	**KT**
Chương 1. Sai số	**10**	**8**	**2**		**0**
1.1. Khái niệm số gần đúng và sai số		1			
1.2. Cách viết số xấp xỉ		2			
1.3. Sự quy tròn số và sai số quy tròn		2	1		
1.4. Các quy tắc tính sai số		2	1		
1.5. Sai số phương pháp và sai số tính toán		1	1		
Chương 2. Giải gần đúng phương trình	**15**	**10**	**4**		**1**
2.1. Đặt vấn đề		1			
2.2. Nghiệm và khoảng phân ly nghiệm		1			
2.3. Phương pháp chia đôi		2	1		
2.4. Phương pháp lặp		2	1		
2.5. Phương pháp dây cung		2	1		
2.6. Phương pháp tiếp tuyến (Newton)		2	1		
Chương 3. Xấp xỉ hàm	**12**	**9**	**3**		**0**
3.1. Đa thức nội suy. Lược đồ Hoócne		2			
3.2. Đa thức nội suy Lagrange		2	1		
3.3. Đa thức nội suy Newton		2	1		
3.4. Phương pháp bình phương bé nhất		3	1		
Chương 4. Đạo hàm số. Tích phân số	**12**	**8**	**3**		**1**
4.1. Tính gần đúng đạo hàm		4	1		
4.2. Tính gần đúng tích phân xác định		4	2		
Chương 5. Giải gần đúng phương trình vi phân	**11**	**7**	**3**		**1**
5.1. Đặt vấn đề		1			
5.2. Phương pháp Euler, Euler cải tiến		3	2		
5.3. Phương pháp Runger-Kutta		3	1		

TÊN CHƯƠNG MỤC	PHÂN PHỐI SỐ TIẾT				
	TS	LT	TH/Xemina	BT	KT
Tổng số tiết:	**60**	**42**	**15**		**3**

Nhiệm vụ của sinh viên :

Tham dự các buổi thuyết trình của giáo viên, tự học, tự làm bài tập do giáo viên giao, tham dự các buổi thực hành, các bài kiểm tra định kỳ và cuối kỳ.

Tài liệu học tập :

- Phạm Kỳ Anh, *Giải tích số,* NXB ĐHQG Hà Nội, 1996.
- Tạ Văn Đĩnh, *Phương pháp tính*, NXB Giáo dục Hà Nội, 2006.
- Dương Thủy Vỹ, *Giáo trình Phương pháp tính*, NXB KH&KT Hà Nội, 2006.

Hình thức và tiêu chuẩn đánh giá sinh viên:

- Hình thức thi cuối kỳ : Thi viết.
- Sinh viên phải đảm bảo các điều kiện theo Quy chế của Nhà trường và của Bộ

Thang điểm: Thang điểm chữ A, B, C, D, F

Điểm đánh giá học phần: Z = 0,3X + 0,7Y.

Chương 1: Sai số

1.1. Sai số tuyệt đối và sai số tương đối

1.Sai số tuyệt đối

Trong tính gần đúng ta làm việc với các giá trị gần đúng của các đại lượng. Cho nên vấn đề đầu tiên cần nghiên cứu, là vấn đề sai số. Xét đại lượng đúng A có giá trị gần đúng là a. Lúc đó ta nói " *a xấp xỉ A*" và viết " $a \approx A$ ". Trị tuyệt đối $|a - A|$ gọi là *sai số tuyệt đối* của a (Xem là giá trị gần đúng của A). Vì nói chung ta không cần biết số đúng A, nên không tính được sai số tuyệt đối của a. Do đó ta tìm cách *ước lượng* sai số đó bằng số dương Δ_a nào đó lớn hơn hoặc bằng $|a - A|$:

$$|a - A| \leq \Delta_a \qquad (1.1)$$

Số dương Δ_a này gọi là *sai số tuyệt đối giới hạn* của a. Rõ ràng nếu Δ_a là sai số tuyệt đối giới hạn của a thì mọi số $\Delta' > \Delta_a$ có thể xem là sai số tuyệt đối giới hạn của a. Vì vậy trong những điều kiện cụ thể người ta chọn Δ_a *số dương bé nhất có rhể được* thoả mãn những (1.1)

Nếu số xấp xỉ a của A có sai số tuyệt đối giới hạn là Δ_a thì ta quy ước viết

$$A = a \pm \Delta_a \qquad (1.2)$$

với nghĩa của(1.1) tức là:

$$a - \Delta_a \leq A \leq a + \Delta_a \qquad (1.3)$$

2. Sai số tương đối:

Tỉ số $\dfrac{|a - A|}{|a|} \cong \dfrac{|a - A|}{|A|}$ gọi là sai số số tương đối của a (so với A). Nói chung tỉ số đó không tính được vì A nói chung không biết.

Ta gọi tỉ số:

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} \qquad (1.4)$$

Gọi là sai số tương đối gới hạn của a.

Ta suy ra: $\Delta_a = |a|\ \delta_a$ (1.5)

Các công thức (1.4) và (1.5) cho liên hệ giữa sai số tương đối và sai số tuyệt đối . Biết Δ_a thì (1.4) cho phép δ_a , biết δ_a thì (1.5) cho phép tính Δ_a .

Do (1.5) nên (1.2) cũng có thể viết :

$$A= a (1 \pm \delta_a) \qquad (1.6)$$

Trong thực tế người ta xem Δ_a là sai số tuyệt đối và lúc đó δ_a cũng gọi là sai số tương đối.

3. Chú thích

Sai số tuyệt đối không nói lên đầy đủ " *Chất lượng*" của một số xấp xỉ, thực tế " *Chất lượng*" được phản ánh qua sai số tương đối. Lấy thí dụ: đo hai chiều dài A và B được a = 10 m với $\Delta_a = 0,05$ m và b = 2m Với $\Delta_b = 0,05$m. Rõ ràng phép đo A thực hiện " Chất lượng" hơn phép đo B. Điều đó không phản ánh qua sai số tuyệt đối vì chúng bằng nhau, mà qua sai số tương đối:

$$\delta_a \ \frac{0,05}{10} = 0,5\% < \delta_b = \frac{0,05}{2} = 2,5\%$$

1.2. Cách viết số xấp xỉ

1. Chữ có nghĩa

Một số viết ở dạng thập phân có thể gồm nhiều chữ số, nhưng ta chỉ kể các chữ số từ chữ số khác không đầu tiên tính từ trái sang phải là chữ có nghĩa. Chẳng hạn có 2,74 có 3 chữ số có nghĩa, số 0,0207 có ba chữ số có nghĩa.

2. Chữ số đáng tin

Mọi số thập phân đều có dạng:

$$A = \pm \sum a_s 10^s \qquad (1.7)$$

Trong đó: a_s là những số nguyên từ 0 đến 9, chẳng hạn số 65,807 viết:

$$65,807 = 6.10^1 + 5.10^0 + 8.10^{-1} + 0.10^{-2} + 7.10^{-3}$$

Tức ta có dạng (1.7) với:

$$\alpha_1 = 6,\ \alpha_o = 5,\ {}_{\alpha\text{-}1} = 8,\ {}_{\alpha\text{-}2} = 0,\ {}_{\alpha\text{-}3} = 7$$

Giả sử a là giá trị xấp xỉ của A với sai số tuyệt đối giới hạn Δ_a . Ta chú ý chữ α_s là chữ số đứng ở hàng thứ s của a. Nếu $\Delta_a \leq 0,5\ .10^s$ thì nói α_s là *chữ số đáng tin*, nếu Nếu $\Delta_a > 0,5\ .10^s$ thì nói α_s là *chữ số đáng nghi.*

Như vậy là ta đã gắn khái niệm sai số tuyệt đối với khái niệm chữ số đáng tin

Thí dụ: Cho a = 65,827 với Δ_a thì các chữ số 6, 5, 8, 2 là đáng tin, còn các chữ số 7, 4 là đáng nghi. Nếu $\Delta_a = 0,0067$ thì các chữ số 6, 5, 8, là đáng tin còn các chữ số 2, 7, 4 là đáng nghi.

Rõ ràng nếu α_s là đáng tin thì tất cả những chữ số có nghĩa đứng ở bên trái nó cũng là đáng tin và nếu α_s là đáng nghi thì tất cả những chữ số có nghĩa ở bên phải nó cũng đáng nghi.

3. Cách viết số xấp xỉ

Cho số a là giá trị xấp xỉ của A với sai số tuyệt đối giới hạn là Δ_a. Có hai cách viết số xấp xỉ a. Cách thứ nhất là *viết kèm theo sai số* như ở công thức (1.2)

hoặc (1.6) . Cách thứ hai là *viết theo quy ước*: *Mọi chữ số có nghĩa là đáng tin.* Một số viết theo cách thứ hai có nghĩa là nó có sai số tuyệt đối giới hạn *không lớn hơn một nửa đơn vị ở hàng cuối cùng*. Các bảng số cho sẵn như bảng lôgarít, v...v.. thường in các số xấp xỉ theo quy ước này.

1.3. Sai số quy tròn

1. Hiện tượng quy tròn số và sai số quy tròn.

Trong tính toán khi gặp một số có quá nhiều chữ số đáng nghi người ta bỏ đi một vài chữ số ở cuối cho gọn, việc làm đó gọi là *quy tròn số*. Mỗi khi quy tròn một số người ta tạo ra một sai số mới gọi là *sai số quy tròn* nó bằng hiệu giữa số đã quy tròn và số chưa quy tròn. Trị tuyệt đối của hiệu đó gọi là sai số quy tròn tuyệt đối *càng bé càng tốt*, ta chọn quy tắc sau đây: *quy tròn sao cho sai số quy tròn tuyệt đối không lớn hơn một nửa đơn vị ở hàng được giữ lại cuối cùng, tức là 5 đơn vị ở hàng bỏ đi đầu tiên, cụ thể là, nếu chữ số bỏ đi đầu tiên ≥ 5 thì thêm vào chữ số giữ lại cuối cùng một đơn vị, còn nếu chữ số bỏ đi đầu tiên < 5 thì để nguyên chữ số giữ lại cuối cùng.*

Thí dụ: Số 62,8274 quy tròn đến chữ số lẻ thập phân thứ ba (tức là giữ lại các chữ số từ đầu đến chữ số lẻ thập phân thứ b) sẽ thành số 62,827; cũng số đó quy tròn đến chữ số lẻ thập phân thứ hai sẽ thành 62,83; và cũng số đó quy tròn đến ba chữ số có nghĩa (tức là chỉ giữ lại ba chữ số có nghĩa) sẽ thành 62,8.

2. Sai số của số đã quy tròn.

Gải sử a là số xấp xỉ của số đúng A với sai số tuyệt đối giới hạn là Δ_a. Giả sử ta quy tròn a thành a' thì $|a' - a|$ là sai số quy tròn tuyệt đối. Số lượng θ_a thoả mãn:

$$|a' - a| \le \theta_{a'} \qquad (1.8)$$

Gọi là sai số quy tròn tuyệt đối giới hạn, cũng gọi là sai số quy tròn tuyệt đối cho gọn.

Hãy tính sai số tuyệt đối giới hạn $\Delta_{a'}$ của a'. Ta có:

$$a' - A = a' - a + a - A$$

Do đó:

$$|a' - A| \le |a' - a| + |a - A| \le \theta_{a'} + \Delta_a$$

Vậy ta có thể lấy

$$\Delta_{a'} = \Delta_a + \theta_{a'} \qquad (1.9)$$

Rõ ràng $\Delta_{a'} > \Delta_a$ tức là việc quy tròn số làm tăng sai số tuyệt đối giới hạn.

3. ảnh hưởng của sai số quy tròn

Thí dụ: Xét đại lượng A = $(\sqrt{2} - 1)^{10}$. áp dụng công thức nhị thức niutơn (Newton) ta có công thức đúng:

$$(\sqrt{2} - 1)^{10} = 3363 - 2378\sqrt{2} \qquad (1.10)$$

Với: $\sqrt{2}$ = 1,41421356....

Bây giờ ta tính hai vế của (1.10) bằng cách thay $\sqrt{2}$ bởi cá số quy tròn (xem bảng 1.1):

Bảng 1.1

$\sqrt{2}$	Vế trái	Vế phải
1,4	0,0001048576	33,8
1,41	0,00013422659	10,02
1,414	0,00014791200	0,508
1,41421	0,00014866399	0,00862
1,414213563	0,00014867678	0,0001472

Sự khác biệt giữa các giá trị tính ra của hai vế chứng tỏ rằng sai số quy tròn có thể có những tác dụng rất đáng ngại trong các quá trình tính toán. Ta nói quá trình tính A bằng vế trái của (1.10) là quá trình tính ổn định, quá trình tính A bằng vế phải của (1.10) là quá trình tính không ổn định.

1.4. Các quy tắc tính sai số

1. Mở đầu.

Xét hàm số u của hai biến số x và y :

$$u = f(x,y) \tag{1.11}$$

Cho biết sai số về x và y, hãy lập công thức tính sai số về u.

Để tránh nhầm lẫn trước hết ta nhắc lại ý nghĩa của các ký hiệu:

Δx, Δy, Δu chỉ các số gia của x, y, u

Dx, dy, du chỉ các vi phân của x, y, u

Δ_x, Δ_y, Δ_u lại là các sai số tuyệt đối của x, y, u. Theo định nghĩa (1.1) ta luôn có:

$$|\Delta x| \leq \Delta_x \,;\quad |\Delta y| \leq \Delta_y \tag{1.12}$$

Ta phải tìm: Δ_u để có $|\Delta_u| \leq \Delta_u$

2. Sai số của tổng u = x + y

Ta có: $\Delta u = \Delta x + \Delta y$

Ta suy ra: $|\Delta u| \leq |\Delta x| + |\Delta y|$

Do đó theo (1.12) ta có:

$|\Delta u| \leq \Delta_x + \Delta_y$

Ta chọn:

$$\Delta_{x+y} = \Delta_x + \Delta_y \tag{1.13}$$

Để có: $|\Delta u| \leq \Delta_u$. Vậy có quy tắc:

Sai số tuyệt đối (Giới hạn) của một tổng bằng tổng các sai số tuyệt đối (Giới hạn) của các số hạng.

Chú thích. Xét trường hợp u = x- y với x và y cùng dấu .

Lúc đó:

$$\delta_u = \frac{\Delta_u}{u} = \frac{\Delta x + \Delta y}{|x-y|}$$

Cho nên nếu $|x - y|$ rất bé thì sai số tương đối giới hạn rất lớn. Do đó trong tính toán người ta tìm cách *tránh phải trừ các số gần nhau.*

3. Sai số của tích u = xy

Ta có: $\Delta u \approx du = ydx + xdy \approx y\Delta x + x\Delta y$

$$|\Delta u| \le |y|\ |\Delta x| + |x|\ |\Delta y| \le |y|\ \Delta_x + |x|\ \Delta_y$$

Ta suy ra: $\Delta_u = |y|\Delta_x + |x|\Delta_y$

Do đó: $\delta_u = \dfrac{\Delta_u}{|u|} = \dfrac{|y|\Delta_x + |x|\Delta_y}{|xy|} = \dfrac{\Delta_x}{|x|} + \dfrac{\Delta_y}{|y|}$

Tức là có:

$$\delta_{xy} = \delta_x + \delta_y \qquad (1.14)$$

Vậy có quy tắc: *Sai số tương đối (Giới hạn) của một tích bằng tổng các sai số tương đối (Giới hạn) của các số hạng của tích. Đặc biệt ta có:*

$$\delta_{(x^n)} = n\delta_x \text{ ; n nguyên dương } \Delta \qquad (1.15)$$

4. Sai số của thương x/y $y \neq o$

Tương tự như trường hợp tích ta có quy tắc:

Sai số tương đối của một thương bằng tổng các sai số tương đối của các hạng số hạng :

$$\delta_{x/y} = \delta_x + \delta_y \qquad (1.16)$$

5. Công thức tổng quát:

Cho : $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$

Ta có sai số tuyệt đối : $\Delta_u = \sum_{n=1}^{n} \left|\dfrac{\delta f}{\delta x_i}\right| \Delta x_i$ (1.17)

Và từ đó ta suy ra sai số tương đối δ_u theo định nghĩa (1.4)

Thí dụ: Tính sai số tuyệt đối (giới hạn) và sai số tương đối (giới hạn) của thể tích cầu:

$$V = \frac{1}{6}đd^3$$

Nếu đường kính d = 3,7 ± 0,05 cm và đ = 3,14.

Giải . Xem đ và d là đối số của hàm V, theo (1.14) và (1.15) ta có:

$$\delta_v = \delta_đ + 3\delta_d$$

$\delta đ = 0,0016/314 = 0,0005$

$\delta_d = 0,05/3,7 = 0,0135$

Suy ra: $\delta_V = 0,0005 + 3.0,0135 = 0,04$

Mặt khác: $V = \frac{1}{6}đd^3 = 26,5\ cm^3$

Vậy có: $\Delta_V = 26,5\ .0,04 = 1,06 \approx 1,1cm^3$

$V = 26,5 \pm 1,1\ cm^3$

1.5. sai số tính toán và sai số phương pháp

1. Mở đầu

Khi giải gần đúng một bài toán phức tạp ta phải thay bài toán đã cho bằng một bài toán đơn giản hơn có thể giải được thông qua việc thực hiện các phép tính thông thường bằng tay hoặc máy tính điện tử. *Phương pháp thay bài toán phức tạp bằng bài toán đơn giản như thế gọi là phương pháp gần đúng*. Sai số do phương pháp gần đúng tạo ra gọi là sai số phương pháp. Để giải bài toán đơn giản ta phải thực hiện các phép tính thông thường, ta luôn luôn phải quy tròn các kết quả trung gian. Sai số tạo ra bởi tất cả các lần quy tròn như vậy gọi là sai số tính toán. Sai số cuối cùng là tổng hợp của hai loại sai số phương pháp và tính toán nói trên.

2.Thí dụ

a) *Hãy tính tổng:*

$$\mathbf{A} = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{6^3}$$

Giải. A là tổng của 6 phân số. Ta có thể tính trực tiếp A mà không phải thay nó bằng một tổng đơn giản hơn . Vì vậy ở đây không có sai số phương pháp. Để tính A ta hãy thực hiện các phép chia dến ba chữ số lẻ thập phân và đánh giá các sai số quy tròn tương ưng:

$\frac{1}{1^3} = \frac{1}{1} = 1,000$ với $\theta_1 = 0$

$\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$ với $\theta_2 = 0$

$\frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$ = 0,037 với $\theta_3 = 4.10^{-4}$

$\frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$ = 0,016 với $\theta_4 = 4.10^{-4}$

$\frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$ = 0,008 với $\theta_5 = 0$

$\frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$ = 0,005 với $\theta_6 = 4.10^{-4}$

Vậy A $\approx$ a =1,000 - 0,125 + 0,037 - 0,016 + 0,008 - 0,005 = 0,899

$$|A-a| = \left| \left(\frac{1}{1^3}-1\right) - \left(\frac{1}{2^3}-0{,}125\right) + \left(\frac{1}{3^3}-0{,}037\right) - \left(\frac{1}{4^3}-0{,}016\right) + \left(\frac{1}{5^3}-0{,}008\right) - \left(\frac{1}{6^3}-0{,}005\right) \right|$$

$$|A-a| \le \left|\frac{1}{1^3}-1\right| + \left|\frac{1}{2^3}-0{,}125\right| + \left|\frac{1}{3^3}-0{,}037\right| + \left|\frac{1}{4^3}-0{,}016\right| + \left|\frac{1}{5^3}-0{,}008\right| + \left|\frac{1}{6^3}-0{,}005\right| \le \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 = \mathbf{9}.10^{-4}$$

Do đó

a = 0,899 là giá trị gần đúng của A với sai số tính toán 9.10^{-4}:

Ta viết A = 0,899 $\pm$ $\mathbf{9}.10^{-4}$ (1.18)

***b)** Hãy tính đại lượng`*

$$B = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^3} + \ldots$$

Với sai số tuyệt đối không vượt quá 5.10^{-3}

Giải . Vế phải của B là hợp lý. Nhưng vế phải lá một " tổng vô hạn số hạng", ta không thể cộng hết số này đến số khác mãi được. Do đó để tính B ta phải sử dụng một phương pháp gần đúng, cụ thể là thay B bằng tổng của n số hạng đầu:

$$B_n = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^3}$$

Bài toán tính B_n đơn giản hơn bài toán tính B. Lúc đó $|B - B_n|$ là sai số phương pháp, và số n phải được chọn sao cho sai số phương pháp ấy cộng với sai số tính toán vẫn còn nhỏ hơn 5.10^{-3}. Ta có :

$$|B - B_n| = \left|\frac{1}{(n+1)^3} - \frac{1}{(n+2)^3} + \ldots\right| < \frac{1}{(n+1)^3}$$

(theo lí thuyết về chuỗi số đan dấu), với n = 6 ta thấy :

$$|B - B_6| < \frac{1}{7^3} = \frac{1}{334} < 3.10^{-3}$$

Ta chú ý rằng B_6 = A đã tính ở trên (xem 1.18):

B_6 = A = 0,899 $\pm 9.10^{-4}$

Vậy có thể lấy B $\approx 0{,}899$. Để xét sai số ta có :

B - 0,889 = B - B_6 + A - 0,899

$$|B - 0{,}899| \le |B - B_6| + |A - 0{,}899|$$

$$|B - 0{,}899| \le 3.10^{-3} + 9.10^{-4} < 4.10^{-3}$$

Vậy ta đã tính được B $\approx 0{,}899$ với sai số tuyệt đối không vượt quá 4.10^{-3}

Chú ý rằng : trong sai số tổng hợp cuối cùng có phần của sai số phương pháp và có phần của sai số tính toán, cho nên ta phải khéo phân bố sao cho sai số cuối cùng nhỏ hơn sai số cho phép.

1.6. phụ lục 1

Sự ổn đinh của một quá trình tính

1. Mở đầu

Xét một quá trình vô hạn (tức là gồm vô số bước) để tính ra một đại lượng nào đó. Ta nói quá trình tính là ổn định nếu sai số tính toán tức là các sai số quy tròn tính luỹ lại không tăng vo hạn.

Nếu sai số đó tăng vô hạn thì ta nói quá trình tích là không ổn định

Rõ ràng nếu quá trình tính không ổn định thì khó có hi vọng tính được đại lượng cần tính với sai số cho phép. Cho nên trong tính toán kị nhất là các quá trình tính không ổn định.

Để kiểm tra tính ổn định của một quá trình tính thường người ta giả sử sai số chỉ xảy ra tại một bước, sau đó cho phép tính đều làm đúng không có sai số, nếu cuối cùng sai số tính toán không tăng vô hạn thì xem như quá trình tính ổn định.

2.Thí dụ

Xét quá trình tính

$$y_{i+1} = q y_i , \qquad (1.19)$$

y_0 và q cho trước .

Giả sử tại bước i xác định nào đó khi tính y_i ta phạm một sai số δ_i (đây không phải là kí hiệu của sai số tương đối như trước đây), nghĩa là thay cho y_i ta chỉ thu được $\tilde{y}_i$. Giả sử :

$$\left| y_i - y_i \right| \qquad (1.20)$$

Sau đó thay cho y $_{i+1}$ ta có $\tilde{y}_{i+1}$ với :

$\tilde{y}_{i+1} = q\tilde{y}_i = \sigma > 0$

Lấy(1.21) trừ (1.19) vế với vế ta được:

$\tilde{y}_{i+1} - y_{i+1} = q\, y_i - q\, y_i$

$\tilde{y}_{i+1} - y_{i+1} = q(\tilde{y}_i - y_i)$

Tiếp theo ta có:

$$\tilde{y}_{i+2} = q\tilde{y}_{i+1}$$

$$y_{i+2} = q\, y_{i+2}$$

Bằng phép trừ như trên ta lại có:

$$\tilde{y}_{i+2} - y_{i+2} = q(\tilde{y}_{i+1} - y_{i+1})$$

$$= q^2(\tilde{y}_i - y_i)$$

Một cách tổng quát ta có:

$$\tilde{y}_{i+n} - y_{i+n} = q^n (\tilde{y}_i - y_i)$$

$$|\tilde{y}_{i+n} - y_{i+n}| = |q|^n |\tilde{y}_i - y_i|$$`

Như vậy, nếu ở bước i ta mắc một sai số $|\tilde{y} - y_1| = \delta$ và sau đó mọi phép tính đều làm đúng thì ở bước i+ n ta sẽ mắc sai số

$$|\tilde{y}_{i+n} - y_{i+n}| = |q|^{n\delta}$$

Ta thấy có hai trường hợp cần phân biệt;

1. Trường hợp $|q| \le 1$ lúc đó $|q|^n$

$$|\tilde{y}_{i+n} - y_{i+n}| \le \delta \text{ với mọi n}$$

nghĩa là sai số tính toán bị chặn (không tăng vô hạn). Vậy quá trình tính ổn định.

2.Trường hợp $|q| \le 1$ - Lúc đó $|q|^n$ tăng khi n và $|q|^n \to \infty$, nên sai số

$$|\tilde{y}_{i+n} - y_{i+n}| \to \infty \text{ khi } n \to \infty$$

Vậy quá trình tính không ổn định

Trong thực tế , mặc dù quá trình tính là vô hạn, người ta cũng chỉ làm một số hữu hạn bước, nhưng vẫn phải đòi hỏi quá trình tính ổn định mới hy vọng một số hữu hạn bước có thể đạt được mức độ chính xác mong muốn.

Bài tập

1. Khi đo một góc ta được các giá trị sau: a = $21^o37'3''$; b = $1^o10''$

Hãy tính sai số tương đối của các số xấp xỉ đó biết rằng sai số tuyệt đối trong các phép đo là 1’’

2. Hãy xác định sai số tuyệt đối của các số xấp xỉ sau đây cho biết sai số tương đối của chúng:

a = 13267 ; δ_a = 0,1%

b = 2,32 ; δ_b = 0,7%

3. Hãy xác định số các chữ số đáng tin trong các số đáng tin trong các số a với sai số tuyệt đối như sau:

a = 0,39410; Δ_a = 0,25 .10 $^{-2}$

b = 38,2543 ; $\Delta_b = 0,25 .10^{-2}$

4. hãy xác định số những chữ số đáng tin trong các số a với sai số tương đối như sau:

a = 1,8921 ; $\delta_a = 0,1.10^{-2}$

b = 22,351; $\delta_b = 0,1.$

5. Hãy quy tròn các số dưới đây (xem là đúng) với ba chữ số đáng tin và xác định sai số tuyệt đối Δ và sai số tương đối δ của chúng:

a) 2,1514; b)0,16152;

c)0,01204; d) - 0,0015281.

6. Hãy xác định giá trị của hàm số dưới đây cùng với sai số tuyệt đối và sai số tương đối ứng với những giá trị của các đối số cho với mọi chữ số có nghĩa đều đáng tin :

a) $u = \ln (x + y^2)$; x = 0,97 ; y = 1,132

b) $u = (x + y^2)/z$; x = 3,28; y= 0,932 ; z= 1,132.

7. Tính tổng S sau đây với ba chữ số lẻ thập phân đáng tin :

$$S = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17}$$

8. Tính số e: $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + ...$

với sai số tuyệt đối không quá 10^{-4}

Trả lời

1. $\delta_a = 0,13.10^{-4}$; $\delta_b = 0,28.10^{-3}$

2. $\Delta_a = 0,13.10^2$; $\Delta_b = 0,16.10^{-1}$

3. a) 2; b) 4.

4. a) 3; b)1.

5. a)2,15; $\Delta = 0,14.10^{-2}$; $\delta = 0,65.10^{-3}$

b) 0,162; $\Delta = 0,48.10^{-3}$; $\delta = 0,3.10^2$

c) 0,0120; $\Delta = 0,4.10^{-4}$; $\delta = 0,33.10^{-2}$

d) -0,00153; $\Delta = 0,19.10^{-5}$; $\delta = 125. 10^{-2}$

6. a) u = 0,81; $\Delta_u = 0,27. 10^{-2}$; $\delta_u = 0,33. 10^{-2}$

b) u = 3,665; $\Delta_u = 0,7. 10^{-2}$; $\delta_u = 0,20. 10^{-2}$

7. S = 0,511.

8. $e = 2{,}7183 \pm 0{,}0001$.

Chương 2: Tính gần đúng nghiệm thực của một phương trình

2.1. nghiệm và khoảng phân li nghiệm

1. Nghiệm thực của phương trình một ẩn

Xét phương trình một ẩn :

$$f(x) = 0 \qquad (2.1)$$

trong đó : f là một hàm số cho trước của đối số x.

Nghiệm thực của phương trình (2.1) là số thực α thoả mãn (2.1) tức là khi thay α vào x ở vế trái ta được:

$$f(\alpha) = 0 \qquad (2.2)$$

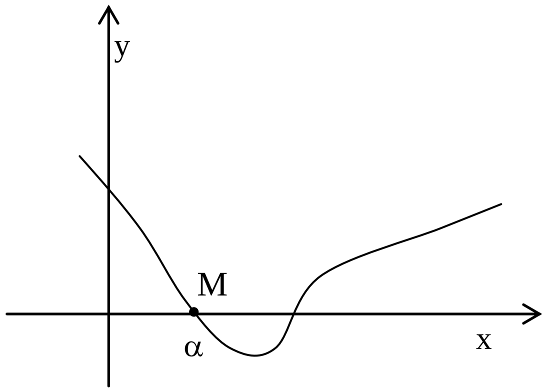
2. ý nghĩa hình học của nghiệm

a vẽ đồ thị của hàm số:

$$y= f(x) \qquad (2.3)$$

trong một hệ toạ độ vuông góc oxy (hình2-1). giả sử đồ thị cắt trục hoành tại một điểm M thì điểm M này có tung độ y = 0 và hoành độ x = α. thay chúng vào (2.3) ta được:

$$0 = f(\alpha) \qquad (2.4)$$



Hình 2-1

Vậy hoành độ α của giao điểm M chính là một nghiệm của (2.1)

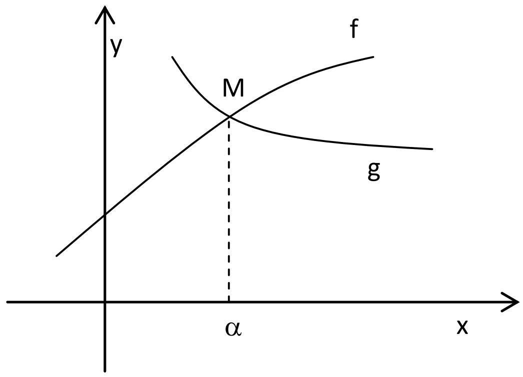
Trước khi vẽ đồ thị ta cũng có thể thay phương trình (2.1) bằng phương trình tương đương :

$$g(x) = h(x) \qquad (2.5)$$

rồi vẽ đồ thị của 2 hàm số (hình 2-2)

$$y = g(x),$$

$$y = h(x) \qquad (2.6)$$



Hình 2.2

Giả sử hai dồ thị ấy cắt nhau tại điểm M có hoành độ x = α thì ta có:

$$g(\alpha) = h(\alpha) \qquad (2.7)$$

Vậy hoành độ α của giao điểm M của 2 đồ thị (2.6) chính là một nghiệm của (2.5), tức là của (2.1).

3. Sự tồn tại nghiệm thực của phương trình (2.1)

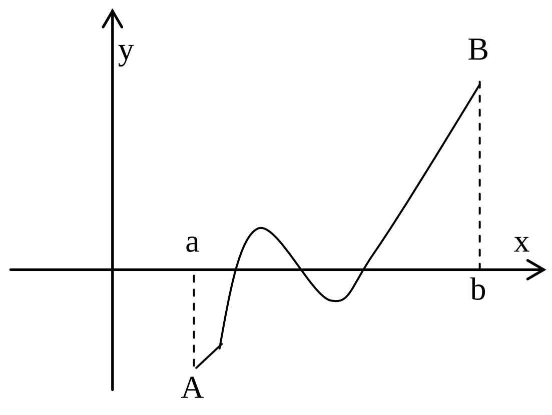
Trước khi tìm cách tính gần đúng nghiệm thực của phương trình (2.1) ta phải tự hỏi xem nghiệm thực ấy có tồn tại hay không. Để trả lời ta có thể dùng phương pháp đồ thị ở mục 2 trên. Ta cũng có thể dùng định lý sau:

Định lí 2.1 - Nếu có 2 số thực a và b (a<b) sao cho f(a) và f(b) trái dấu tức là

$$f(a).f(b) < 0 \qquad (2.8)$$

đồng thời f(x) liên tục trên [a, b] thì ở trong khoảng [a, b] có ít nhất một nghiệm thực của phương trình (2.1).

Điều đó có thể minh hoạ trên đồ thị (hình 2 - 3). Đồ thị của hàm số y = f(x) tại a $\leq x \leq$b là một đường liền nối hai điểm A và B, A ở dưới , B ở trên trục hoành, nên phải cắt trục hoành tại ít nhất một điểm ở trong khoảng từ a đến b. Vậy phương trình (2.1) có ít nhất một nghiệm ở trong khoảng [a, b].



Hình 2-3

4. Khoảng phân ly nghiệm (còn gọi là khoảng cách ly nghiệm hay khoảng tách nghiệm)

Định nghĩa 2.1 - Khoảng [a, b] nào đó gọi là khoảng phân ly nghiệm của phương trình (2.1) nếu có chứa một và chỉ một nghiệm của phương trình đó.

Để tìm khoảng phân ly nghiệm ta có định lý:

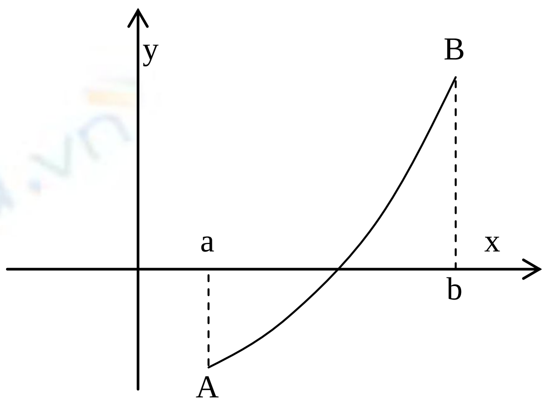
Định lý 2.2 - Nếu [a, b] là một khoảng trong đó hàm số f(x) liên tục và đơn điệu, đồng thời f(a) và f(b) trái dấu, tức là có (2.8) thì [a, b] là một khoảng phân ly nghiệm của phương trình (2.1).

Điều này có thể minh hoạ bằng đồ thị (hình 2 - 4).

Đồ thị của hàm số y = f(x) cắt trục hoành tại một và chỉ một điểm ở trong [a, b]. Vậy [a, b] chứa một và chỉ một nghiệm của phương trình (2.1).

Nếu f(x) có đạo hàm thì điều kiện đơn điệu có thể thay bằng điều kiện *không đổi dấu* của đạo hàm vì đạo hàm không đổi dấu thì hàm số đơn điệu. ta có:

Định lý 2.3 - Nếu [a, b] là một khoảng trong đó hàm f(x) liên tục, đạo hàm f'(x) không đổi dấu và f(a), f(b) trái dấu thì [a, b] là một khoảng phân ly nghiệm của phương trình (2.1)



Hình 2-4

Muốn tìm các khoảng phân ly nghiệm của phương trình (2.1) thường người ta nghiên cứu sự biến thiên của hàm số y = f(x) rồi áp dụng định lý 2.3.

5. Thí dụ

Cho phương trình

$$f(x) = x^3 - x - 1 = 0 \qquad (2.9)$$

Hãy chứng tỏ phương trình này có nghiệm thực và tìm khoảng phân li nghiệm.

Giải : Trước hết ta xét sự biến thiên của hàm số f(x). Nó xác định và liên tục tại mọi x, đồng thời

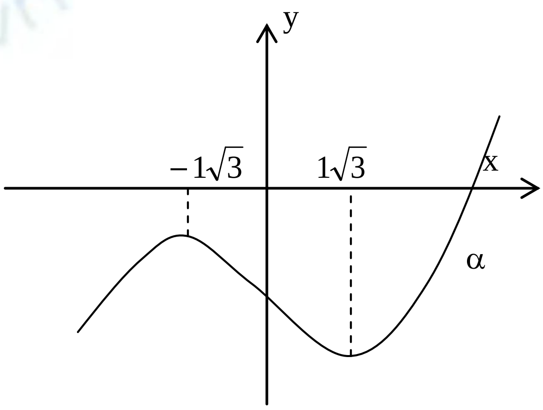
$$f'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \text{ tại } x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ta suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-1/\sqrt{3}$		$1/\sqrt{3}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	M	↘	m	↗	$+\infty$

trong đó : $M = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 < 0$

Vậy đồ thị cắt trục hoành tại một điểm duy nhất (h. 2-5), do đó phương trình (2.9) có một nghiệm thực duy nhất, ký hiệu nó là α.



Hình 2-5

Ta tính thêm

$$f(1) = 1^3 - 1 - 1 < 0$$

$$f(2) = 2^3 - 2 - 1 > 0$$

Vậy khoảng [1, 2] chứa nghiệm của phương trình (2.9)

Nhưng vì phương trình này chỉ có một nghiệm nên chính nghiệm ấy phân ly ở trong [1, 2].

Tóm lại, *phương trình (2. 9) có một nghiệm thực duy nhất α,* phân ly ở trong khoảng [1, 2].