

Chúng ta sẽ áp dụng mô phỏng để xác định số nhu cầu trung bình cần được phục vụ trong khoảng thời gian 4 phút như trình bày sau đây.

Kí hiệu T_i là thời điểm đến của tín hiệu thứ i , T_{ki} là thời điểm kết thúc dịch vụ của tín hiệu thứ i (nếu có), tại kênh thứ k ($k = 1, 2, 3$). Thời điểm đến của nhu cầu tiếp theo là $T_i = T_{i-1} + \tau_i$ với τ tuân theo luật phân phối mũ có hàm mật độ $f(t) = 5e^{-5t}$ và hàm phân phối là $F(t) = 1 - e^{-5t} = P(\tau \leq t)$.

Lúc đó $T_1 = 0$, $T_{11} = T_1 + 0,5$. Kết quả này cho biết thời điểm đến của tín hiệu thứ nhất là $T_1 = 0$ và được kênh 1 phục vụ. Kết thúc phục vụ tín hiệu 1 là thời điểm $T_{11} = T_1 + 0,5 = 0,5$. Máy đếm ghi nhận 1 đơn vị là số tín hiệu đã được phục vụ.

Để tìm T_2 theo công thức $T_2 = T_1 + \tau_2$, ta phát sinh τ_2 theo cách đã biết ở mục 1.3: Trước hết, phát sinh số ngẫu nhiên r_2 có 2 chữ số sau dấu phẩy $0 \leq r_1 \leq 1$ (theo bảng số ngẫu nhiên - phụ lục 2B) ta có $r_2 = 0,10$. Sau đó tính $\tau_2 = -\frac{1}{5} \ln r_2$ và $T_2 = T_1 - \frac{1}{5} \ln r_2 = 0 - 0,2 \ln 0,1 = 0,46$. Vậy tín hiệu tiếp theo phải vào kênh 2 vì kênh 1 còn đang bận. Máy đếm ghi thêm 1 đơn vị thời điểm kết thúc phục vụ tín hiệu 2 là $T_{22} = T_2 + 0,5 = 0,46 + 0,5 = 0,96$.

Tiếp tục phát sinh $r_3 = 0,09$, ta có $\tau_3 = -0,2 \ln 0,09 = 0,482$. Do đó thời điểm đến của tín hiệu 3 là $T_3 = T_2 + \tau_3 = 0,46 + 0,482 = 0,942$. Lúc này kênh 1 đã được giải phóng do đã phục vụ xong tín hiệu 1, nên tín hiệu 3 được tiếp nhận vào kênh 1. Tại thời điểm kết thúc phục vụ tín hiệu 3 là $T_{13} = T_3 + 0,5 = 0,942 + 0,5 = 1,442$ máy đếm lại ghi tiếp 1 đơn vị.

Thực hiện tính toán tương tự, kết quả tổng hợp được ghi trong bảng IV.6.

Bảng IV.6. Tính toán mô phỏng tìm số nhu cầu được phục vụ

Thứ tự tín hiệu	Số ngẫu nhiên r_i	$-\ln r_i$	$\tau = -1/5 \ln r_i$	Thời điểm đến T_i	Thời điểm T_{ki} kết thúc phục vụ tại kênh k			Đếm số tín hiệu	
					1	2	3	nhận	bỏ
1				0	0,5			1	
2	0,10	2,30	0,46	0,46		0,96		1	
3	0,09	2,44	0,482	0,942	1,442			1	
4	0,73	0,32	0,064	1,006		1,506		1	
5	0,25	1,39	0,278	1,284			1,784	1	
6	0,33	1,11	0,222	1,506	2,006			1	
7	0,76	0,27	0,054	1,560		2,060		1	
8	0,52	0,65	0,13	1,690					1
9	0,01	4,6	0,92	2,61	3,11			1	
10	0,35	1,05	0,21	2,82		3,32		1	
11	0,86	0,15	0,03	2,85			3,35	1	
12	0,34	1,08	0,216	3,066					1
13	0,67	0,40	0,08	3,146	3,646			1	
14	0,35	1,05	0,21	3,356		3,856		1	

Thứ tự tín hiệu	Số ngẫu nhiên r_i	$-\ln r_i$	$\tau_i =$ $-1/5 \ln r_i$	Thời điểm đến T_i	Thời điểm T_{ki} kết thúc phục vụ tại kênh k			Đếm số tín hiệu	
					1	2	3	nhận	bỏ
15	0,48	0,73	0,146	3,502			4,022	1	
16	0,76	0,27	0,054	3,556					1
17	0,80	0,22	0,044	3,600					1
18	0,95	0,05	0,01	3,61					1
19	0,9	0,10	0,02	3,63					1
20	0,91	0,09	0,018	3,648	4,148			1	
21	0,17	1,77	0,354	4,002				1	
								14	6

Phân tích kết quả tính toán ta thấy trong 20 nhu cầu đến thì chỉ có 14 nhu cầu được phục vụ. Tính toán tương tự 6 lần nữa ta có kết quả:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
14	15	14	12	13	15

Vậy số nhu cầu trung bình được hệ phục vụ trong vòng 4 phút vào khoảng

$$\bar{x} = (14 + 15 + 14 + 12 + 13 + 15)/6 = 13,83.$$

Giải bài toán dịch vụ ba kênh có từ chối trên máy tính

Một phần mềm máy tính với tên gọi MOPHONG1 phiên bản 1.0 đã được thiết kế dựa trên ngôn ngữ Builder C++ 5.0 để giải bài toán một dịch vụ với nhiều kênh phục vụ có từ chối như đã trình bày trong ví dụ 1 với các điều kiện sau:

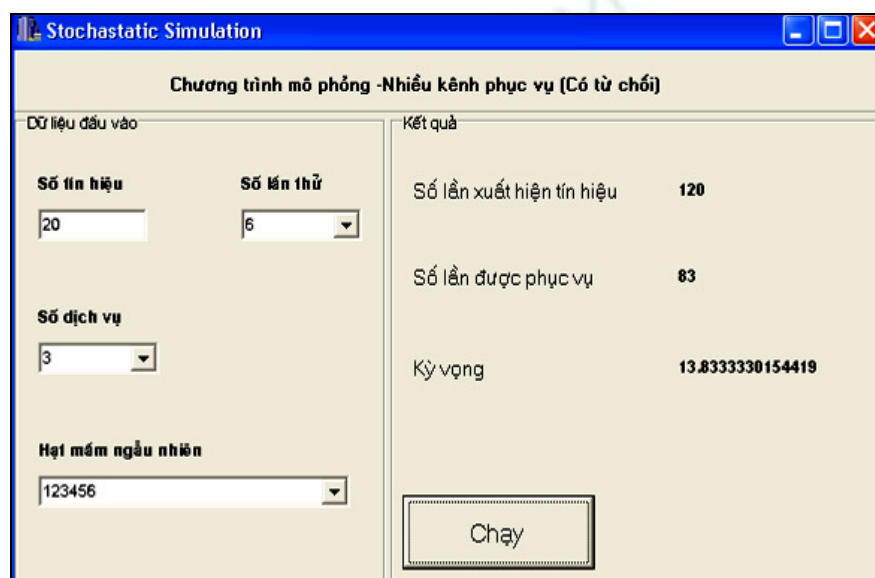
- Số kênh phục vụ n có thể lấy giá trị từ 2 tới 10.
- Dòng tín hiệu đến là dòng Poát-xông, thời gian dẫn cách giữa hai tín hiệu liên tiếp tuân theo phân phối mũ với hàm mật độ xác suất là $f(t) = 5e^{-5t}$.
- Thời gian trung bình phục vụ (xử lý) một tín hiệu là 0,5 phút.
- Tính số tín hiệu được phục vụ trong số m tín hiệu đến (m có thể lấy giá trị từ 10 tới 100).
- Thực hiện k lần mô phỏng (k lần thử, k có thể lấy giá trị từ 4 tới 10).

Mục đích của việc xây dựng phần mềm này nhằm vào: phục vụ dạy và học môn Mô phỏng ngẫu nhiên, cũng như tiếp tục nâng cấp phiên bản 1.0 để mô phỏng được hệ nhiều kênh phục vụ – nhiều loại dịch vụ có từ chối trong trường hợp tổng quát khi dòng tín hiệu đến và thời gian phục vụ tín hiệu có phân phối bất kì.

Để chạy phần mềm MOPHONG1 chúng ta cần cài đặt Builder C++ 5.0 vào máy tính. Sau khi kích chuột vào biểu tượng của phần mềm, chọn *File > Open Project > Look in > Mophong1 (Thư mục lưu trữ phần mềm) > Mp1.bpr*. Sau đó chọn *Run* trên thanh công cụ để chạy phần mềm (xem hình IV.4).

Chúng ta nhập số kênh phục vụ $n = 3$ vào ô số (kênh) dịch vụ, số tín hiệu phát sinh $m = 20$ vào ô số tín hiệu, số lần mô phỏng $k = 6$ vào ô số lần thử. Ngoài ra ta phải chọn hạt mầm là một số nguyên (đủ lớn) nhằm khởi tạo hàm sinh số ngẫu nhiên có phân phối đều trong $[0, 1)$, chẳng hạn số 123456 để ghi vào ô hạt mầm ngẫu nhiên, nhằm từ đó mô phỏng dòng Poát-xông các tín hiệu đến. Sau đó chúng ta kích chuột vào nút *Chạy* để chạy chương trình.

Kết quả ta thấy tổng cộng số tín hiệu đến là 120, trong đó có 83 tín hiệu được phục vụ (do đó có 37 tín hiệu bị từ chối). Vậy trung bình trong 20 tín hiệu đến có 13,833 tín hiệu được phục vụ. Kết quả này so với kết quả tính toán trên giấy cho ví dụ trên là khá sát nhau.



Hình IV.4. Chạy phần mềm MOPHONG 1

Chú ý: Việc tính toán dựa vào bảng số ngẫu nhiên cho trong phụ lục hoặc dựa vào hàm sinh số ngẫu nhiên trong máy tính không cho kết quả hoàn toàn giống nhau trong các lần chạy mô phỏng khác nhau. Điều này xảy ra là vì các bộ số ngẫu nhiên tạo được không giống nhau. Với các hạt mầm khác nhau thì hàm sinh số ngẫu nhiên cũng cho các bộ số ngẫu nhiên khác nhau và do đó các kết quả cuối cùng cũng không trùng nhau. Muốn kết quả mô phỏng ổn định hơn cần chọn số tín hiệu đến m đủ lớn.

Ngoài ra, chúng ta có thể chọn số kênh phục vụ tùy ý, chẳng hạn $n = 5$. Kết quả chạy phần mềm với hạt mầm 123456 cho biết trong số 20 tín hiệu đến trung bình có 18,167 tín hiệu được phục vụ.

Ví dụ 2: Một công ti điều hành một kho nguyên liệu để cấp phát cho các đốc công của 10 phân xưởng. Hiện tại, hai nhân viên phục vụ đang được công ti giao cho nhiệm

vụ cấp phát nguyên liệu. Bộ phận quản lí công ti muốn cân nhắc liệu có nên thêm một nhân viên phục vụ nữa hay không.

Rõ ràng rằng số độc công (tín hiệu cần phục vụ) là hữu hạn, phân phối của số tín hiệu đến trong một đơn vị thời gian cũng không theo kiểu Poát-xông và thời gian phục vụ tín hiệu cũng không tuân theo luật phân phối mũ. Do đó, không thể tìm ra được lời giải giải tích thông qua một mô hình nhiều kênh phục vụ với các giả thiết như vậy. Phương pháp “duy nhất” là tìm cách áp dụng mô phỏng.

Số liệu thu thập được

– Quan sát trong vòng một tháng vào các ngày làm việc, mỗi ngày một giờ vào các thời điểm ngẫu nhiên, các số liệu về thời gian phục vụ một tín hiệu và tần suất tương ứng đã được thu thập (bảng IV.7).

– Tính thời gian phục vụ trung bình cho một tín hiệu (tính kì vọng):

$$8 \times 0,1 + 9 \times 0,2 + 10 \times 0,3 + 11 \times 0,4 = 10 \text{ (phút).}$$

– Ngoài ra cũng đã khảo sát được: giãn cách thời gian trung bình giữa hai tín hiệu liên tiếp là 5 phút và số lượng tín hiệu trung bình đến trong một khoảng 5 phút là một tín hiệu.

Bảng IV.7. Thời gian phục vụ một tín hiệu và tần suất

Thời gian phục vụ một tín hiệu (phút)	Số lượng	Tần suất/Xác suất thực nghiệm
8	15	0,1
9	30	0,2
10	45	0,3
11	60	0,4
	$\Sigma = 150$	$\Sigma = 1$

Cần chú ý rằng, dòng tín hiệu đến chưa chắc tuân theo phân phối Poát-xông và thời gian phục vụ một tín hiệu không nhất thiết tuân theo phân phối mũ. Do đó, không áp dụng được công thức của mục 3.3 mà phải dùng mô phỏng để giải quyết vấn đề: cần bố trí bao nhiêu kênh phục vụ (nhân viên phục vụ) trong kho cấp phát nguyên liệu là hợp lí nhất? Như vậy mô phỏng có khả năng xử lí các tình huống, sự kiện như trong thực tế xảy ra chứ không bắt chúng tuân theo các phân phối xác suất nhất định hay theo các hành vi gò ép.

Mô phỏng hệ thống hàng chờ

– Mô phỏng tín hiệu đến: trung bình 5 phút có 1 tín hiệu đến. Chúng ta dùng 24 số ngẫu nhiên sau lấy ra từ bảng số ngẫu nhiên (phụ lục 2A), mỗi số gồm 10 chữ số để mô

phòng 24 khoảng 5 phút (như vậy tổng cộng là 120 phút, mỗi số dùng để mô phỏng một khoảng 5 phút từ 9h – 11h): 1581922396, 2068577984, 8262130892, 8374856049, 4637567488, 0928105582, 7295088579, 9586111652, 7055508767, 6472382984, 4112077556, 3440672486, ..., 5973470495. Nếu chữ số 7 xuất hiện trong số 10 chữ số đã chọn, ta coi như 1 tín hiệu đến trong khoảng thời gian tương ứng (vì trung bình trong 5 phút có 1 tín hiệu đến cũng giống như trung bình trong một số có 10 chữ số có một chữ số 7). Chẳng hạn trong khoảng 5 phút đầu không có tín hiệu nào, khoảng 5 phút thứ hai có 2 tín hiệu đến.

Ta thấy số tín hiệu đến chỉ có thể là 0, 1, 2, 3, 4 tín hiệu. Thời điểm đến của tín hiệu trong mỗi khoảng 5 phút được quy định như sau tùy theo số tín hiệu đến trong khoảng đó (bảng IV.8). Chẳng hạn, nếu có hai tín hiệu đến thì thời điểm đến là vào đầu phút thứ nhất và đầu phút thứ ba.

Bảng IV.8. Quy định thời điểm đến của tín hiệu

Phút	1	2	3	4	5
Nếu 1 tín hiệu đến	*				
Nếu 2 tín hiệu	*		*		*
Nếu 3 tín hiệu	*	*	*	*	*
Nếu 4 tín hiệu			*		

– Mô phỏng thời gian phục vụ X một tín hiệu: Ta mô phỏng phân phối xác suất ở bảng IV.7 theo cách đã biết. Trước hết lấy ba số ngẫu nhiên có 10 chữ số: 9846413446, 8306646692, 0661684251 (hàng 4 từ dưới lên, phụ lục 2A). X = 8 phút nếu xuất hiện chữ số 0; X = 9 phút nếu xuất hiện chữ số 1, 2; X = 10 phút nếu xuất hiện chữ số 3, 4, 5; X = 11 phút nếu xuất hiện chữ số 6, 7, 8 hoặc 9. Bảng IV.9 tổng hợp kết quả mô phỏng số tín hiệu đến và thời gian phục vụ các tín hiệu.

Bảng IV. 9. Kết quả mô phỏng số tín hiệu đến và thời gian phục vụ tín hiệu

Chu kì	Số ngẫu nhiên 10 chữ số										Số tín hiệu đến	Thời gian phục vụ
	1	5	8	1	9	2	2	3	9	6		
1	1	5	8	1	9	2	2	3	9	6	0	
2	2	0	6	8	5	7	7	9	8	4	2	11, 11
3	8	2	6	2	1	3	0	8	9	2	0	
4	8	3	7	4	8	5	6	0	4	9	1	10
5	4	6	3	7	5	6	7	4	8	8	2	11, 10
6	0	9	2	8	1	0	5	5	8	2	0	
7	7	2	9	5	0	8	8	5	7	9	2	9, 10
8	9	5	8	6	1	1	1	6	5	2	0	
9	7	0	5	5	5	0	8	7	6	7	3	10, 10, 11
10	6	4	7	2	3	8	2	9	3	4	1	11

Chu kì	Số ngẫu nhiên 10 chữ số										Số tín hiệu đến	Thời gian phục vụ
11	4	1	1	2	0	7	7	5	5	6	2	10, 8
12	3	4	4	0	6	7	2	4	8	6	1	11
13	1	8	8	2	4	1	2	9	6	3	0	
14	0	6	8	4	0	1	2	0	0	6	0	
15	0	9	3	3	1	4	7	9	1	4	1	11
16	7	4	5	7	4	7	7	4	6	8	4	10, 11, 11, 11
17	5	4	3	5	8	8	0	7	8	8	1	9
18	9	6	7	0	8	5	2	9	1	3	1	8
19	1	2	9	1	2	6	5	7	3	0	1	11
20	4	8	9	0	0	3	1	3	0	5	0	
21	0	0	9	9	5	2	0	8	5	8	0	
22	3	0	9	0	9	0	8	8	7	2	1	11
23	2	0	3	9	5	9	3	1	8	1	0	
24	5	9	7	3	4	7	0	4	9	5	2	9,11

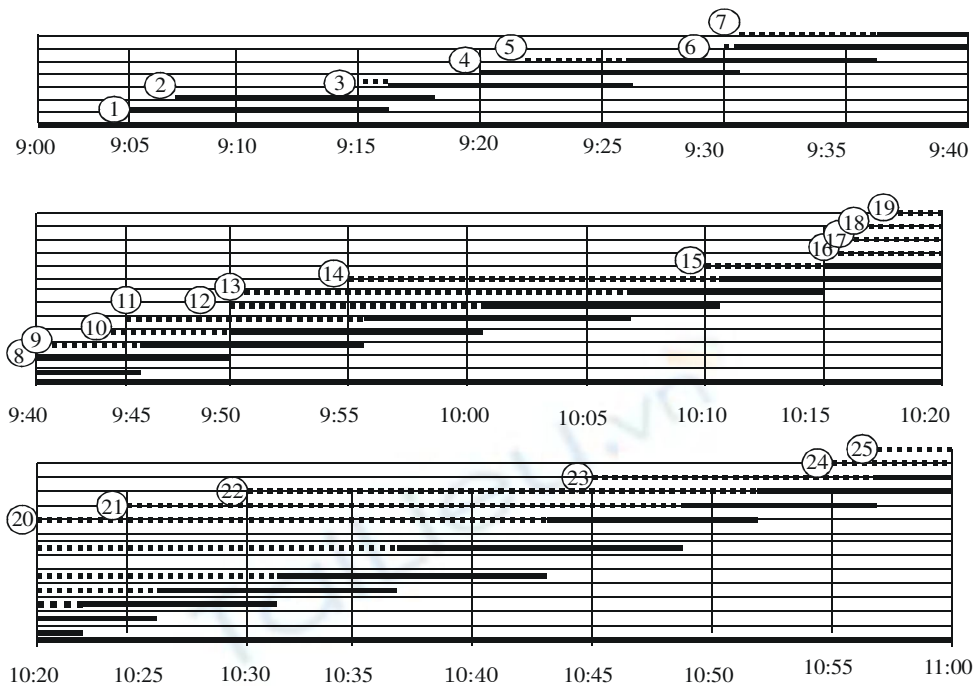
Để tiến hành minh họa quá trình tính toán mô phỏng cho số tín hiệu đến trong từng khoảng thời gian 5 phút và thời gian phục vụ mỗi tín hiệu, chúng ta quy ước các kí hiệu sau:

○ Tín hiệu đến Chờ ————— Được phục vụ

Hình IV.5 tổng hợp kết quả tính toán mô phỏng cho hệ thống chờ hai kênh phục vụ - một dịch vụ.

Theo hình IV.5 có thể thấy, trong thời gian 120 phút có 25 tín hiệu đến (25 số 7 xuất hiện ở các chu kì 2, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 15, 16, 17, 18, 19, 22, 24). Tổng thời gian đợi 213 phút, vì vậy thời gian đợi trung bình = $213/25 = 8,52$ phút.

Chúng ta phân tích ý nghĩa kinh tế của tính toán mô phỏng như sau: Mô hình hàng chờ trên có hai kênh phục vụ (hai nhân viên phục vụ). Giả sử rằng lương 7\$/1 giờ/1 nhân viên phục vụ, lương của mỗi đốc công là 12\$/1 giờ/1 đốc công. Theo dữ kiện của bài toán, thời gian trung bình giữa hai lần tín hiệu đến liên tiếp là 5 phút. Như vậy, trong 8 giờ có 96 lần đi và phải đợi 8,52 phút mỗi lần. Do đó, tổng hao hụt/mỗi ngày làm việc do thời gian đốc công lãng phí do phải đợi là: $(8,52 \times 12\$ \times 96)/60 = 163,56\$$. Ngoài ra, tổng chi lương/ngày cho hai nhân viên phục vụ là: $7\$ \times 8 \times 2 \text{ người} = 112\$$. Từ đó, tổng chi phí/ngày cho hệ thống hàng chờ trên là \$ 275,56.



Hình IV.5. Tổng hợp kết quả mô phỏng hệ thống chờ

Tương tự, nếu bố trí ba kênh phục vụ (ba nhân viên phục vụ) thì có thể tính được thời gian trung bình chờ đợi là 1,88 phút và tổng chi phí cho hệ thống ba kênh là 204\$. Nếu dùng bốn kênh phục vụ thì thời gian chờ đợi trung bình là 0 phút, tổng chi phí là 224\$. Vậy hệ thống hàng chờ trên nên dùng ba kênh phục vụ là tốt nhất. Nói cách khác, ban điều hành công ti nên điều thêm một nhân viên phục vụ tới làm việc tại kho cấp phát nguyên liệu nhằm giảm bớt chi phí “cơ hội”.

So sánh với lời giải lí thuyết

So sánh lời giải dùng mô phỏng với lời giải dựa trên lí thuyết mô hình hàng chờ (lúc đó cần giả sử rằng: số tín hiệu đến tuân theo luật Poát-xông, thời gian phục vụ một tín hiệu tuân theo phân phối mũ).

Khi tra phụ lục 3 tìm P_0 dựa vào tỉ số $A/(kS)$ với $k = 3$ là số kênh phục vụ, ta được

$$P_0 = 0,11435 \quad (A = 12, S = 6; A/(kS) = 0,66) ;$$

$$L_s = \frac{AS(A/S)^k}{(k-1)!(kS-A)^2} P_0 + \frac{A}{S} = 2,915 ; L_q = L_s - \frac{A}{S} = 0,915 ;$$

$$W_q = \frac{L_q}{A} = 0,076 \text{ (giờ)} = 4,5 \text{ phút.}$$