khoảng thời gian Δt là $1 - S\Delta t$. Lúc đó ta có công thức sau đây đúng với mọi $n > 0$ (hãy tham khảo thêm mục 2.4, Chương IV):

$$p_n(t + \Delta t) = p_n(t)(1 - A\Delta t)(1 - S\Delta t) + p_{n-1}(t)(A\Delta t)(1 - S\Delta t) + p_{n+1}(t)(1 - A\Delta t)(S\Delta t).$$

Với $n = 0$, có: $p_0(t + \Delta t) = p_0(t)(1 - A\Delta t) + p_1(t)(1 - A\Delta t)(S\Delta t)$. Từ các công thức trên bằng cách chuyển vế thích hợp, chia cả hai vế cho Δt và cho qua giới hạn, sẽ có các công thức sau:

$dp_n(t)/dt = Ap_{n-1}(t) + Sp_{n+1}(t) - (A + S)p_n(t)$, đúng $\forall n > 0$, $dp_0(t)/dt = -Ap_0(t) + Sp_1(t)$.

Do đó lời giải cho trạng thái vững (*steady state solutions*) phải thoả mãn:

$Ap_{n-1} + Sp_{n+1} - (A + S)p_n = 0$, $\forall n > 0$, $-Ap_0 + Sp_1 = 0$ với $n = 0$ $\Rightarrow p_n = (1 - \rho)\rho^n$, $\forall n$.

– Từ đó tìm giá trị của các chỉ số thích hợp theo các công thức $Ls = \sum_{n=0}^{\infty} np_n$, $Ws = Ls/A$, $Wq = Ws - 1/S$, $Lq = AWq$. Hãy kiểm tra lại các kết quả trên theo công thức (I) mục 3.3 đã biết.

5. Xét các điều kiện của bài tập 3. Hãy xác định cần bố trí bao nhiêu chỗ cho xe chờ trước khi vào rửa để khi một xe tới sử dụng dịch vụ có chỗ đỗ với xác suất 90%.

6. Xét bài tập 3. Giả sử trạm xe chỉ có 4 chỗ cho xe chờ trước khi sử dụng dịch vụ và do đó nếu hàng chờ đã có 4 xe thì một xe mới đến sẽ bỏ đi tới chỗ rửa xe khác. Hãy áp dụng công thức (IV) mục 3.3 để xác định % khách hàng bị mất và thời gian trung bình rửa xong một xe tính từ lúc vào hàng chờ.

7. Các bài tập 3, 4 và 5 có thể được giải bằng phương pháp mô phỏng như thế nào?

8. Xét một quầy bán hàng ăn nhanh với các số liệu sau: giãn cách thời gian giữa thời điểm hai khách hàng liên tiếp đến quầy tuân theo phân phối đều trong khoảng từ 1 tới 5 phút, thời gian phục vụ mỗi một khách hàng là đúng 2 phút. Hãy thực hiện mô phỏng ngẫu nhiên và cho biết: hệ số sử dụng của quầy và số khách hàng trung bình trong hàng chờ.

9. Giải lại bài tập trên, biết rằng khách hàng chia thành hai loại: loại được ưu tiên và loại bình thường (khách thuộc loại được ưu tiên khi đến quầy được xếp phía trên tất cả các khách loại bình thường). Ngoài ra cho biết tỉ lệ khách hàng ưu tiên so với bình thường là 1/2.

10. Khảo sát 200 xung tín hiệu qua các van điện đến điều khiển cơ cấu chấp hành, người ta thấy trung bình 2 giây có một chuỗi xung. Số liệu đã khảo sát được về thời gian xung của các chuỗi xung được cho trong bảng.

Bằng phương pháp mô phỏng ngẫu nhiên (nếu có thể, lập chương trình tính toán trên máy tính) hãy xác định số van điện (tối thiểu) cần mở sao cho việc điều hành cơ cấu chấp hành được liên tục (nói cách khác, các chuỗi xung luôn được phục vụ kịp thời).

Thời gian xung (giây)	Số lần	Tần suất
3	50	0,25
4	40	0,20
5	50	0,25
6	60	0,30

11. Một trạm bưu điện viễn thông có 13 cổng. Thời gian phục vụ mỗi khách hàng trung bình là 5 phút. Kết quả khảo sát thống kê cho biết số lượng tín hiệu khách hàng trung bình đến trong một giờ, còn kết quả thu thập phiếu thăm dò ý kiến khách hàng cho biết thời gian trung bình (số phút) một khách hàng có thể đợi trước khi được phục vụ như sau:

Các giai đoạn	Số tín hiệu/giờ	Thời gian có thể đợi tối đa
Nhu cầu cao	120	5
Nhu cầu trung bình	60	5,5
Nhu cầu thấp	30	6

Sử dụng mô phỏng ngẫu nhiên, hãy xác định quy trình tính toán tìm số cổng tối thiểu cần mở trong mỗi giai đoạn để đáp ứng được yêu cầu của khách hàng (những giả thiết nào cần đề ra để giải quyết vấn đề này).

12. Một trạm rút tiền có hai máy tự động, tại mỗi máy có hàng chờ cho tối đa 4 khách hàng (kể cả người đang sử dụng dịch vụ). Các khách hàng đến trạm tuân theo luật Poát – xông với thời gian giãn cách trung bình giữa hai lần liên tiếp khách đến là 1 phút. Nếu cả hai hàng chờ đều đã có đủ số lượng tối đa người chờ thì khách hàng tới trạm sẽ bỏ đi. Trong trường hợp hàng chờ còn chỗ, khách mới tới sẽ xếp vào hàng chờ ít người hơn, nếu hai hàng chờ cùng còn chỗ, khách mới tới vào hàng bên phải. Trong trường hợp hai hàng chờ đều còn chỗ, khách hàng có thể chuyển từ hàng dài sang hàng ngắn hơn nếu thấy hàng đó có ít nhất ít hơn hai người so với hàng đang đứng. Giả sử thời gian rút tiền tại mỗi máy đều tuân theo luật mũ với kì vọng là 1,5 phút. Hãy sử dụng mô phỏng ngẫu nhiên (và viết chương trình máy tính phù hợp) để xác định các chỉ số sau:

– Thời gian trung bình một khách hàng sử dụng dịch vụ (tính từ khi vào hàng chờ cho tới khi rút được tiền).

– Thời gian giãn cách trung bình giữa hai khách hàng bỏ đi.

– Hệ số sử dụng của mỗi máy rút tiền.

– Độ dài trung bình của mỗi hàng chờ (kể cả khách hàng đang rút tiền).

Chương V
PHÂN TÍCH MARKOV VÀ ỨNG DỤNG

1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ XÍCH MARKOV

1.1. Một số định nghĩa

Nhiều mô hình ngẫu nhiên trong Vận trù học, Kinh tế, Kĩ thuật, Dân số học, Di truyền học,... dựa trên cơ sở là quá trình Markov. Đặc biệt, Tin sinh học (*Bioinformatics*), một lĩnh vực liên ngành của Sinh học phân tử và Tin học, hiện tại đang ứng dụng rất mạnh các vấn đề của lí thuyết các quá trình Markov. Các nhiều chuyên gia ngành Điện tử viễn thông và Cơ điện cũng rất quan tâm tới quá trình Markov nói chung, cũng như các quá trình sinh–tử hay quá trình hồi phục nói riêng.

Ví dụ 1: Xét một hệ thống vật lí tiến triển theo thời gian. Tại thời điểm t = 0, hệ thống có thể rơi vào một trong ba trạng thái (hay vị trí) 1, 2 hoặc 3 một cách ngẫu nhiên. Kí hiệu X(0) là vị trí của hệ thống tại thời điểm t = 0 thì X(0) là một biến ngẫu nhiên, có thể nhận các giá trị 1 hoặc 2 hoặc 3 với các xác suất nhất định. Giả sử rằng căn cứ vào các kết quả quan sát hay nghiên cứu, chúng ta có bảng phân phối xác suất sau cho X(0):

Các giá trị của X(0)	1	2	3
Xác suất tương ứng	0,2	0,5	0,3

Tại các thời điểm tiếp theo, chẳng hạn, t = 1, 2, 3,... vị trí của hệ thống sẽ được mô tả bởi các biến ngẫu nhiên X(1), X(2), X(3),... với các bảng phân phối xác suất tương ứng. Dựa trên ví dụ này, chúng ta xét định nghĩa sau về quá trình ngẫu nhiên.

Định nghĩa 1

Xét một hệ thống (có thể là hệ thống vật lí, hệ thống sinh thái hay hệ thống dịch vụ, …) tiến triển theo thời gian. Gọi X(t) là vị trí (trạng thái) của hệ tại thời điểm t. Như vậy ứng với mỗi thời điểm t, X(t) chính là một biến ngẫu nhiên mô tả vị trí (trạng thái) của hệ thống. Quá trình $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ được gọi là một *quá trình ngẫu nhiên.*

Tập hợp các vị trí có thể có của hệ gọi là *không gian trạng thái*. Không gian trạng thái được kí hiệu là S. Trong ví dụ trên, nếu giả sử rằng X(t) chỉ có thể nhận một trong ba giá trị 1, 2, 3 $\forall$t thì S = {1, 2, 3}.

Giả sử trước thời điểm s, hệ đã ở trạng thái nào đó, còn tại thời điểm s, hệ ở trạng thái i. Chúng ta muốn đánh giá xác suất để tại thời điểm t (t >s), hệ sẽ ở trạng thái j. Nếu xác suất này chỉ phụ thuộc vào bộ bốn (s, i, t, j), tức là P[X(t) = j/X(s) = i] = p(s, i, t, j) là đúng $\forall$i, $\forall$j, $\forall$s, $\forall$t thì điều này có nghĩa là, sự tiến triển của hệ trong tương lai chỉ phụ thuộc vào hiện tại (trạng thái của hệ tại thời điểm s) và hoàn toàn độc lập với quá khứ (*tính không nhớ*). Đó chính là *tính Markov*. Lúc này quá trình ngẫu nhiên X(t) được gọi là *quá trình Markov*.

Trong ví dụ trên P[X(1) = 2/X(0) = 1] là xác suất có điều kiện của sự kiện X(1) = 2 (tại thời điểm t =1, hệ thống nằm tại vị trí 2) với điều kiện X(0) = 1 (tại thời điểm t = 0, hệ thống nằm tại vị trí 1). Nếu quá trình ngẫu nhiên có tính Markov thì xác suất này chỉ phụ thuộc vào trạng thái của hệ tại thời điểm s = 0 và hoàn toàn độc lập với các trạng thái của hệ trong quá khứ (trước thời điểm s = 0).

Định nghĩa 2

Nếu không gian trạng thái S gồm một số hữu hạn hoặc vô hạn đếm được các trạng thái thì quá trình Markov X(t) được gọi là *xích Markov*. Lúc này, có thể kí hiệu S = {1, 2, 3,...}, tức là các trạng thái được đánh số. Hơn nữa, nếu tập các giá trị t không quá đếm được (chẳng hạn, t = 0, 1, 2,...) thì ta có xích Markov với *thời gian rời rạc*, hay xích Markov rời rạc. Nếu $t \in [0, \infty)$ thì ta có xích Markov với *thời gian liên tục*, hay xích Markov liên tục.

Định nghĩa 3

Xét một xích Markov. Nếu xác suất chuyển trạng thái p(s, i, t, j) = p(s+h, i, t+h, j), $\forall$i, $\forall$j, $\forall$s, $\forall$t và $\forall$h > 0 thì ta nói rằng xích Markov *thuần nhất theo thời gian*.

Đây là một khái niệm mới và sẽ được giải thích ngay sau đây trong mục 1.2. Ngoài ra với mục đích tìm hiểu bước đầu, trong các mục 1.2 và 1.3 chúng ta sẽ chỉ xét xích Markov rời rạc và thuần nhất theo thời gian. Ví dụ về xích Markov liên tục sẽ được xem xét trong mục 2.4 và 2.5.

1.2. Ma trận xác suất chuyển trạng thái và phân phối dừng

Trong mục này chúng ta đưa ra khái niệm về ma trận xác suất chuyển trạng thái của một xích Markov rời rạc và thuần nhất theo thời gian với không gian trạng thái gồm N phần tử. Trong trường hợp xích Markov rời rạc và thuần nhất có không gian trạng thái với số phần tử vô hạn đếm được, khái niệm về ma trận xác suất chuyển trạng thái sẽ được xây dựng một cách tương tự.

Ví dụ 2: Xét lại ví dụ 1 trong mục 1.1, nhưng với một cách minh họa khác trong lĩnh vực dịch vụ. Trong một khu phố 1000 dân (khách hàng) có 3 siêu thị là A, B và C (A, B, C được coi là các vị trí 1, 2, 3 của hệ thống siêu thị này). Giả sử rằng, trong từng tháng mỗi khách hàng luôn trung thành với một siêu thị. Ngoài ra, cũng giả sử rằng trong tháng đầu số khách vào các siêu thị lần lượt là 200, 500 và 300; tức là có 20% khách hàng vào siêu thị A, 50% vào B và 30% vào C. Như vậy, có thể dự đoán rằng một khách hàng vào A với xác suất 0,2; vào B với xác suất 0,5 và vào C với xác suất 0,3. Để mô tả tình trạng phân chia thị phần trong tháng đầu (tháng 0) của hệ thống siêu thị trên, chúng ta thiết lập biến ngẫu nhiên X(0) với quy tắc: nếu khách hàng mua hàng ở siêu thị

A thì đặt X(0)=1, ở siêu thị B thì đặt X(0) = 2, còn ở siêu thị C thì X(0) = 3. Lúc đó, X(0) có bảng phân phối xác suất sau:

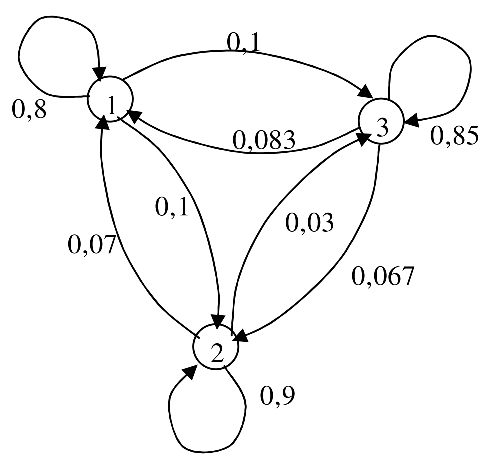
Các giá trị của X(0)	1	2	3
Xác suất tương ứng	0,2	0,5	0,3

Kí hiệu $P[X(0) = 1] = \pi_1^{(0)}$, $P[X(0) = 2] = \pi_2^{(0)}$, $P[X(0) = 3] = \pi_3^{(0)}$ thì véc tơ $\Pi^{(0)} = [\pi_1^{(0)}, \pi_2^{(0)}, \pi_3^{(0)}] = [0{,}2\ 0{,}5\ 0{,}3]$ được gọi là *véc tơ phân phối xác suất tại thời điểm t = 0* hay *véc tơ phân phối ban đầu.* Các thành phần của $\Pi^{(0)}$ cho biết tỉ lệ phần trăm (%) khách hàng vào các siêu thị A, B và C.

Những tháng sau, ta giả sử xác suất để một người khách, đã vào mua hàng ở siêu thị A tháng trước vào lại A trong tháng sau luôn là 0,8; chuyển sang mua hàng ở B luôn là 0,1 và chuyển sang C luôn là 0,1. Xác suất để một người khách, đã vào mua hàng ở siêu thị B tháng trước chuyển sang A luôn là 0,07; vào lại B luôn là 0,9 và chuyển sang C luôn là 0,03. Còn xác suất để một người khách, đã vào siêu thị C tháng trước chuyển sang A luôn là 0,083; chuyển sang B luôn là 0,067 và vào lại C luôn là 0,85. Lúc đó các xác suất chuyển của khách hàng được cho thông qua *ma trận xác suất chuyển trạng thái P* (còn gọi là *ma trận chuyển* sau một bước):

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}07 & 0{,}9 & 0{,}03 \\ 0{,}083 & 0{,}067 & 0{,}85 \end{bmatrix} = [p_{ij}]_{3\times 3}.$$

Chúng ta có thể vẽ được sơ đồ chuyển trạng thái như trên hình V.1.



Hình V.1. Sơ đồ chuyển trạng thái

Để mô tả tình trạng phân chia thị phần trong tháng t (t = 1, 2, 3,...) của hệ thống siêu thị trên, có thể thiết lập biến ngẫu nhiên X(t) với quy tắc tương tự như khi thiết lập X(0): nếu khách hàng mua hàng ở siêu thị A thì đặt X(t) = 1, ở siêu thị B thì đặt X(t) = 2, còn ở siêu thị C thì X(t) = 3. Vấn đề đặt ra là X(t) có bảng phân phối xác suất như thế nào.

Trước hết ta đi tìm bảng phân phối xác suất cho X(1). Xét p_{12} = P[(X(1) = 2/X(0) = 1] = 0,1 là xác suất để một người khách, đã vào mua hàng ở siêu thị A tháng 0 chuyển sang mua hàng ở siêu thị B trong tháng 1. Ngoài ra, P[X(t+1) = 2/X(t) = 1] = 0,1 ∀t là số tự nhiên, vì theo giả thiết của bài toán thì xác suất để một người khách, đã vào mua hàng ở siêu thị A tháng trước chuyển sang mua hàng ở B luôn là 0,1. Vậy p_{12} được gọi là *xác suất chuyển sau một bước* từ vị trí 1 sang vị trí 2, bởi vậy có thể dùng kí hiệu $p_{12}^{(1)}$ để chỉ rõ đây là xác suất chuyển sau một bước. Các phần tử p_{ij} ∀i = 1, 2, 3 và ∀j = 1, 2, 3 của ma trận P có ý nghĩa tương tự.

Dễ thấy rằng trong tháng 1 số khách hàng mua hàng tại siêu thị A là 200 × 0,8 + 500 × 0,07 + 300 × 0,083 = 219,9 (≈ 220); số khách hàng mua hàng tại siêu thị B là 200 × 0,1 + 500 × 0,9 + 300 × 0,067 = 490,1 (≈ 490); còn số khách hàng mua hàng tại siêu thị C sẽ là 200 × 0,1 + 500 × 0,03 + 300 × 0,85 = 290. Do tổng số khách hàng là 1000, nên X(1) có bảng phân phối xác suất sau:

Các giá trị của X(1)	1	2	3
Xác suất tương ứng	0,2199	0,4901	0,2900

Vậy véc tơ phân phối xác suất tại thời điểm t = 1 là $\Pi^{(1)} = [\pi_1^{(1)}, \pi_2^{(1)}, \pi_3^{(1)}]$ cho biết tỉ lệ phần trăm khách hàng vào các siêu thị A, B và C trong tháng 1. Bằng phép tính ma trận cũng tìm được $\Pi^{(1)}$ như sau:

$$\Pi^{(1)} = \Pi^{(0)} \times P = [0{,}2\ 0{,}5\ 0{,}3] \times \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}07 & 0{,}9 & 0{,}03 \\ 0{,}083 & 0{,}067 & 0{,}85 \end{bmatrix} = [0{,}2199\ 0{,}4901\ 0{,}2900].$$

Tương tự có thể tìm được $\Pi^{(2)}$:

$$\Pi^{(2)} = \Pi^{(1)} \times P = [0{,}2199\ 0{,}4901\ 0{,}2900] \times \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}07 & 0{,}9 & 0{,}03 \\ 0{,}083 & 0{,}067 & 0{,}85 \end{bmatrix}$$

$$= [0{,}234297\ 0{,}48251\ 0{,}283193].$$

Sau đây ta đi tìm ma trận xác suất chuyển trạng thái sau hai bước. Kí hiệu $p_{12}^{(2)}$ là xác suất chuyển từ vị trí 1 sang vị trí 2 sau hai bước. Theo công thức xác suất toàn phần ta có:

$$p_{12}^{(2)} = P[X(2) = 2/X(0) = 1] = P[X(1) = 1/X(0) = 1] \times P[X(2) = 2/X(1) = 1]$$

$$+ P[X(1) = 2/X(0) = 1] \times P[X(2) = 2/X(1) = 2]$$