$$\begin{cases} q_{00}\pi_0 + q_{10}\pi_1 + q_{20}\pi_2 + \ldots = 0, \\ q_{01}\pi_0 + q_{11}\pi_1 + q_{21}\pi_2 + \ldots = 0, \\ q_{02}\pi_0 + q_{12}\pi_1 + q_{22}\pi_2 + \ldots = 0, \\ \ldots . \end{cases}$$

Do tính chất đặc biệt, như đã phân tích ở trên, của ma trận cường độ Q của quá trình sinh–tử, hệ trên được viết một cách tường minh hơn như sau:

$$\begin{cases} -\lambda_0\pi_0 & + \mu_1\pi_1 + \ldots & = 0, \\ \lambda_0\pi_0 & - (\lambda_1 + \mu_1)\pi_1 + \mu_2\pi_2 + \ldots & = 0, \\ \lambda_1\pi_1 & - (\lambda_2 + \mu_2)\pi_2 + \mu_3\pi_3 + \ldots & = 0, \\ \ldots & & \end{cases}$$

Từ đây dễ dàng tìm được $\pi_{n+1} = (\lambda_n/\mu_{n+1})\pi_n$, $\forall n = 1, 2, 3, \ldots$ để đi tới công thức tính $\pi_i, \forall i$.

$$\begin{cases} \pi_1 = (\lambda_0/\mu_1)\pi_0, \\ \pi_2 = (\lambda_1/\mu_2)\pi_1 = (\lambda_1\lambda_0/\mu_2\mu_1)\pi_0, \\ \pi_3 = (\lambda_2/\mu_3)\pi_2 = (\lambda_2\lambda_1/\mu_3\mu_2)\pi_1 = (\lambda_2\lambda_1\lambda_0/\mu_3\mu_2\mu_1)\pi_0, \\ \ldots \\ \pi_{n+1} = (\lambda_n/\mu_{n+1})\pi_n = \ldots = (\lambda_n\lambda_{n-1\ldots}\ \lambda_0/\mu_{n+1}\mu_{n\ldots}\ \mu_1)\pi_0, \\ \ldots \end{cases}$$

Với điều kiện $\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i = 1$, cuối cùng ta có:

$$\pi_0 = 1/(1 + \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_k\lambda_{k-1\ldots}\ \lambda_0/\mu_{k+1}\mu_{k\ldots}\ \mu_1)).$$

Đặc biệt khi $\mu_n = 0$, $\forall n$ thì quá trình sinh–tử trở thành quá trình sinh thuần khiết (*pure birth process*). Quá trình sinh thuần khiết với $\lambda_n = \lambda$ là quá trình Poát–xông với tham số λ.

Ví dụ 2: Giả sử dòng khách hàng đến mua vé ở một văn phòng bán vé với M quầy phục vụ là dòng Poát–xông với tham số $\lambda = 6$ khách hàng/1 phút (điều này cũng có nghĩa là khách hàng đến phòng bán vé với các thời điểm đến tuân theo luật phân phối mũ với tham số $\lambda = 6$).

Ngoài ra, còn biết nguyên tắc phục vụ là FCFS (*First come first served*) và thời gian phục vụ tại mỗi quầy có luật phân phối mũ với kì vọng 1/3 (phút).

Cần trả lời hai câu hỏi sau đây:

– Số quầy hàng tối thiểu là bao nhiêu để hàng chờ không trở nên dài vô hạn?

– Giả sử N_t là số khách hàng đang chờ hay đang được phục vụ tại thời điểm t. Chọn M = 4 và một khách hàng sẽ chờ để được phục vụ nếu $N_t \le 4$, chờ với xác suất 0,5 nếu $N_t = 5$ và sẽ bỏ đi nếu $N_t = 6$. Hãy xác định phân phối dừng của quá trình này?

Trước hết, trong ví dụ này chúng ta có một quá trình sinh–tử với không gian trạng thái $S = \{S_0, S_1, S_2,..., S_n,...\}$, trong đó S_n là trạng thái trong văn phòng có n khách hàng. Các cường độ chuyển là $\lambda_k = 6$ với k = 0, 1, 2,... còn $\mu_k = 3k$ với $k \le M$ và $\mu_k = 3M$ với $k > M$. Điều này là do biến cực tiểu của các biến ngẫu nhiên với phân phối mũ độc lập cũng có phân phối mũ với tham số bằng tổng các tham số của các phân phối mũ tương ứng. Thật vậy, giả sử $X = \text{Min}\{X_1, X_2\}$ với X_1 và X_2 tuân theo phân phối mũ độc lập với các tham số μ_1 và μ_2, thế thì $P(X \ge t) = P(X_1 \ge t)\, P(X_2 \ge t) = e^{-\mu_1 t}e^{-\mu_2 t} = e^{-(\mu_1+\mu_2)t}$. Do đó X có phân phối mũ với tham số $\mu = \mu_1 + \mu_2$.

Do $\lambda_k/\mu_{k+1} = 6/3M < 1$ (khi $k \ge M$) nên với $M \ge 3$ thì:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_k\lambda_{k-1}...\lambda_0 / \mu_{k+1}\mu_k...\mu_1) < \infty.$$

Bởi vậy hàng đợi sẽ không dài vô hạn (nếu trái lại, khi chuỗi phân kì thì $\pi_0 = \pi_1 = \pi_2 = ... = 0,$ nên số khách trong hàng đợi sẽ dần tới một số hữu hạn khi $t \to \infty$ với xác suất bằng 0).

Trong câu hỏi thứ hai, ta có $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 6$, $\lambda_5 = 3$. Theo công thức tính $\pi_0 = 1/(1+\sum_{k=0}^{5} (\lambda_k\lambda_{k-1}...\lambda_0 / \mu_{k+1}\mu_k...\mu_1))$ ta có ngay $\pi_0 = 12/89$. Từ đó tính ra $\pi_1 = 24/89$, $\pi_2 = 24/89$, $\pi_3 = 16/89$, $\pi_4 = 8/89$, $\pi_5 = 4/89$ và $\pi_6 = 1/89$.

3. MÔ PHỎNG XÍCH MARKOV

3.1. Mô phỏng xích Markov thời gian rời rạc

Phương pháp 1

Xích Markov rời rạc và thuần nhất còn có thể được kí hiệu là $X_0, X_1, X_2,...$ Giả sử không gian trạng thái là S gồm hữu hạn trạng thái: S = {0, 1, 2,..., N} và ma trận xác suất chuyển trạng thái đã được biết là $P = [p_{ij}]_{N\times N}$. Chúng ta sẽ mô phỏng xích Markov rời rạc và thuần nhất thông qua ví dụ đã trình bày ở các mục 1.2 và 2.1 của chương này.

Ta có phân phối ban đầu là:

X_0	1	2	3
$\Pi^{(0)}$	$\pi_1^{(0)} = 0,2$	$\pi_2^{(0)} = 0,5$	$\pi_3^{(0)} = 0,3$

Để mô phỏng X_0 ta áp dụng phương pháp mô phỏng phân phối rời rạc đã học ở chương III. Trên máy tính, ta phát sinh ra một số ngẫu nhiên r = RANDOM[0,1) theo luật phân phối đều U[0,1) trong [0,1). Nếu $r \le 0{,}2$ ta lấy $X_0 = 1$; nếu $0{,}2 < r \le 0{,}7$ thì ta lấy $X_0 = 2$; còn nếu $r > 0{,}7$ thì đặt $X_0 = 3$. Căn cứ kết quả mô phỏng X_0, ta mô phỏng X_1 dựa trên ma trận xác suất chuyển trạng thái:

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}07 & 0{,}9 & 0{,}03 \\ 0{,}083 & 0{,}067 & 0{,}85 \end{bmatrix}.$$

Giả sử đã biết $X_0 = 2$, lúc đó ta cần mô phỏng biến ngẫu nhiên X_1 căn cứ phân phối sau:

X_1	1	2	3
Xác suất tương ứng	$p_{21} = 0{,}07$	$p_{22} = 0{,}9$	$p_{23} = 0{,}03$

Điều này có thể được thực hiện tương tự như khi mô phỏng X_0. Cần chú ý rằng, trong hàng thứ hai của bảng trên ta có phân phối xác suất có điều kiện của X_1 với điều kiện $X_0 = 2$. Các bước tiếp theo mô phỏng X_2, X_3,... được tiến hành tương tự (cho tới X_{500} chẳng hạn).

Lặp lại quy trình này bắt đầu từ X_0 cho một số bước lặp L đủ lớn (chẳng hạn 1000 lần), ta sẽ có một bộ 1000 số liệu cho X_{500}. Từ đó, có thể tìm được bảng phân phối tần suất (còn gọi là xác suất thực nghiệm) của X_{500} qua thí nghiệm mô phỏng trên đây đối với X_{500}. Như vậy, ta tìm được véc tơ phân phối (xác suất thực nghiệm) $\Pi^{(500)}$. Cuối cùng, chúng ta có kết quả tìm gần đúng phân phối dừng là: $\Pi \approx \Pi^{(500)}$.

Chú ý:

– Trong ví dụ trên đây, ta thấy có thể dùng mô phỏng để tìm phân phối dừng. Tuy nhiên, mục đích chủ yếu của phương pháp 1 là nhằm mô phỏng các xích Markov rời rạc thuần nhất, là các quá trình có thể xảy ra trong các hệ thống phức tạp.

– Khi không gian trạng thái S gồm một số lớn các trạng thái thì phương pháp mô phỏng trên yêu cầu thời gian chạy máy tính khá lớn. Để khắc phục điều này, chúng ta xem xét phương pháp 2 sau đây.

Phương pháp 2

Xét một hệ thống kĩ thuật được biểu diễn bởi xích Markov rời rạc thuần nhất $\{X_t\}$, t = 0, 1, 2,... với không gian trạng thái S có N trạng thái (N khá lớn) và ma trận chuyển trạng thái $P = [p_{ij}]_{N \times N}$. Xét thời điểm n, tại thời điểm này giả sử đã mô phỏng được $X_n = s$. Ta sẽ mô phỏng thời gian T_n là thời gian tới lần nhảy tiếp theo sớm nhất mà $X_{t+T_n} \ne s$. Do xích Markov là rời rạc nên T_n chỉ có thể nhận các giá trị 1, 2,... Đặt $p = p_{ss}$, dễ thấy T_n có phân phối hình học như sau:

T_n	1	2	...	k	...

Xác suất tương ứng	$1-p$	$(1-p)p$	…	$(1-p)p^{k-1}$	…

Mô phỏng phân phối này ta tìm được giá trị T_n. Còn X_{n+Tn} có phân phối xác suất như sau:

X_{n+Tn}	1	2	…	s	…	N
Xác suất tương ứng	$p_{s1}/(1-p_{ss})$	$p_{s2}/(1-p_{ss})$	…	0	…	$p_{sN}/(1-p_{ss})$

Cách mô phỏng này sẽ tiết kiệm hơn thời gian chạy máy tính (khi N khá lớn), nhưng việc lập trình sẽ phức tạp hơn ít nhiều.

Xét ví dụ như đã trình bày trên, nếu dùng phương pháp 2, một cách hoàn toàn tương tự, chúng ta cũng tìm được phân phối dừng $\Pi^{(*)} \approx \Pi^{(500)}$.

3.2. Mô phỏng xích Markov thời gian liên tục

Xét xích Markov thời gian liên tục $\{X(t)\}_{t\in[0,\infty)}$. Giả sử rằng xích đi vào trạng thái i tại thời điểm nào đó, chẳng hạn thời điểm 0 và không rời khỏi trạng thái này cho đến thời điểm s. Lúc đó, do tính "không nhớ" của quá trình Markov, xác suất để xích vẫn tiếp tục ở nguyên trạng thái đó cho tới thời điểm (t + s) sẽ là:

$$P\{(T_i > s + t)/(Ti > s)\} = P\{T_i > t\}$$

trong đó T_i là thời gian quá trình dừng lại ở trạng thái i. Dễ thấy, nếu T_i có phân phối mũ với hàm phân phối $F(T_i < \tau) = 1 - e^{-\lambda\tau}$ thì đẳng thức trên được thoả mãn. Điều ngược lại cũng có thể chứng minh được. Vậy T_i có phân phối mũ.

Từ nhận xét trên, ta có thể đưa ra một *định nghĩa khác cho xích Markov thời gian liên tục*. Xích Markov thời gian liên tục là một quá trình ngẫu nhiên có các tính chất sau mỗi khi nó đi vào trạng thái i:

– Lượng thời gian T_i xích dừng lại tại trạng thái i trước khi nó chuyển sang trạng thái khác là một biến ngẫu nhiên với phân phối mũ có tham số v_i (hay có kì vọng $1/v_i$).

– Một khi quá trình rời khỏi trạng thái i, nó sẽ đi vào trạng thái j nào đó (độc lập với T_i) với các xác suất p_{ij} thoả mãn $\sum_j p_{ij} = 1, p_{ii} = 0, \forall i$.

Vậy để mô phỏng xích Markov thời gian liên tục, chúng ta cần mô phỏng dãy τ_0, τ_1, τ_2,... (các lượng thời gian τ_r xích dừng lại tại trạng thái J_r trước khi nó chuyển sang trạng thái khác) và dãy J_0, J_1, J_2,... (các trạng thái mà xích chuyển đến). Để phát sinh τ_r, như trên đã nói, ta cần biết tham số v_{J_r} của phân phối mũ tương ứng. Còn để phát sinh trạng thái xích Markov chuyển đến J_r $\forall r$, chúng ta có bảng phân phối xác suất sau:

Trạng thái đến	1	2	…	i	…	N

Xác suất tương ứng	p_{i1}	p_{i2}	...	0	...	p_{iN}

Trong bảng trên, $i = J_{r-1}$ là trạng thái của xích tại bước r – 1 (với các xác suất p_{ij} thoả mãn $\sum_j p_{ij} = 1, p_{ii} = 0, \forall i$).

Để thực hiện mô phỏng xích Markov thời gian liên tục, có thể sử dụng số liệu của ví dụ đã xét trong mục 2.4 hay 2.5.

BÀI TẬP CHƯƠNG V

1. Chỉ số tiêu thụ điện là một lượng ngẫu nhiên có phân phối tại thời điểm ban đầu như sau:

X_0	Dưới 50 số	50 tới 100	100 tới 150	Trên 150
Tỉ lệ %	5%	40%	40%	15%

Biết ma trận xác suất chuyển trạng thái là:

$$P = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,10 & 0,05 & 0 \\ 0,05 & 0,85 & 0,08 & 0,02 \\ 0,02 & 0,03 & 0,90 & 0,05 \\ 0,05 & 0,05 & 0,10 & 0,80 \end{bmatrix}$$

– Hãy giải thích ý nghĩa của ma trận P.

– Tìm phân phối dừng của xích Markov thời gian rời rạc trên đây và cho biết ý nghĩa của kết quả thu được.

2. Một chủ trang trại trồng hoa hàng năm thực hiện phân tích thành phần đất của trang trại. Kết quả phân tích đưa ra đất thuộc vào một trong ba trạng thái: tốt, bình thường và xấu. Các khảo sát thống kê cho biết các ma trận xác suất chuyển trạng thái (sau một năm) trong các trường hợp không bón phân và có bón phân (hữu cơ) như sau:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ và } P_2 = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,05 & 0,4 & 0,55 \end{bmatrix}.$$

Các ma trận lợi nhuận/năm (đơn vị tính là 10 ngàn USD) tương ứng với các ma trận xác suất chuyển trạng thái trên là:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ và } R_2 = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Chủ trang trại cần lựa chọn chính sách tốt nhất trong số tám chính sách sau: không bón phân trong bất cứ trường hợp nào, luôn bón phân trong mọi trường hợp, chỉ bón phân cho đất ở trạng thái 1, chỉ bón phân cho đất ở trạng thái 2, chỉ bón phân cho đất ở trạng thái 3, bón phân một khi đất ở vào trạng thái 1 hoặc 2, bón phân một khi đất ở vào trạng thái 1 hoặc 2, bón phân một khi đất ở vào trạng thái 1 hoặc 2. Các ma trận xác suất chuyển trạng thái và lợi nhuận tương ứng với hai chính sách đầu tiên chính là các ma trận P_1, R_1 và P_2, R_2. Các ma trận xác suất chuyển trạng thái khác có thể dễ dàng xác định được, chẳng hạn tương ứng với chính sách "chỉ bón phân cho đất ở trạng thái 3" là các ma trận sau:

$$P_5 = \begin{bmatrix} 2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,4 & 0,55 \end{bmatrix} \text{ và } R_5 = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Hướng dẫn: Với mỗi một trong tám chính sách trên hãy tìm véc tơ phân phối dừng $\Pi = [\pi_1, \pi_2, \pi_3]$. Sau đó tìm v_i là kì vọng lợi nhuận/năm nếu kết quả phân tích cho biết đất ở trạng thái i, $\forall$ i = 1, 2, 3. Chẳng hạn ứng với P_5 và R_5 ta có $v_2 = 0\times0 + 0,5\times0,5 + 0,5\times1 = 0,75$. Cuối cùng cần tính kì vọng lợi nhuận của chính sách theo công thức: $E = \pi_1\times v_1 + \pi_2\times v_2 + \pi_3\times v_3$. So sánh các kì vọng lợi nhuận này để lựa chọn chính sách tốt nhất. Trong trường hợp các ma trận xác suất chuyển trạng thái và lợi nhuận có cỡ N rất lớn, có thể thiết lập mô hình quy hoạch tuyến tính để lựa chọn chính sách tốt nhất trong số 2^N chính sách.

3. Một hạt vật lí (ban đầu ở tại gốc O) chuyển động trên trục số Ox với quy tắc: mỗi bước chuyển dịch (rất nhanh) một cách ngẫu nhiên sang bên phải hoặc bên trái một đơn vị với xác suất p = 0,5 và 1−p = 0,5.

– Hãy tính xác suất sau 4 bước, hạt nằm tại vị trí x = 4.

– Hãy tính xác suất hạt nằm ở vị trí trên sau một thời gian đủ dài.

4. Trong bài tập này chúng ta nghiên cứu Luật Hardy – Weinberg trong Di truyền học. Xét một quần thể gồm các cá thể có cặp gene một trong các kiểu AA, aa và Aa. Giả sử ở thế hệ ban đầu tỉ lệ các kiểu cặp gene đó là p, q và r (với p + q + r = 1).

– Chứng minh rằng khi chọn một cá thể bất kì ở thế hệ thứ nhất và chọn bất kì một trong hai gene (nằm trong cặp gene AA, aa hoặc Aa), xác suất để có gene A là p + r/2, để có gene a là q + r/2.

– Từ đó hãy tìm tỉ lệ các cá thể có cặp gene AA, aa, Aa tại thế hệ thứ 2.

– Chứng minh rằng với trong câu hỏi đầu tiên, nếu chúng ta thay cụm từ "ở thế hệ thứ nhất" bằng cụm từ "ở thế hệ thứ hai" hay "ở thế hệ thứ n" thì các xác suất cần tính vẫn không thay đổi (*Luật Hardy – Weinberg*).

– Xét một cá thể c_1 ở thế hệ thứ nhất với trạng thái gene là X_1 (có thể nhận các giá trị AA, aa và Aa với các xác suất p, q và r). Gọi X_2 là trạng thái gene của c_2 là con của

c_1, X_3 là trạng thái gene của c_3 là con của c_2... Hãy tìm véc tơ phân phối giới hạn của xích Markov $\{X_n\}$ trên và cho biết ý nghĩa của nó.

5. Cho X_n là một xích Markov với không gian trạng thái S = {1, 2, 3,...} và ma trận xác suất chuyển trạng thái:

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & \ldots \\ 3/4 & 0 & 1/4 & 0 & \ldots \\ 0 & 7/8 & 0 & 1/8 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}$$

Hãy tìm véc tơ phân phối bất biến $\Pi = [\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4,...]$ sao cho $\Pi \times P = \Pi$.

Chú ý: Để tính π_0 cần áp dụng phương pháp tính gần đúng.

6. Cho $\{Xt\}_{t \geq 0}$ là một xích Markov với ma trận cường độ sau đây:

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Hãy tìm phân phối giới hạn cho xích Markov trên đây.

7. Một hệ thống dịch vụ kĩ thuật có hai kênh. Giả sử rằng thời gian phục vụ tín hiệu đến của hai kênh này có phân phối mũ độc lập với nhau với kì vọng là 20 (giây), tức là μ = 1/20, khi trong hệ thống không có quá hai tín hiệu. Nếu trong hệ thống có từ ba tín hiệu trở lên thì μ = 1/30. Ngoài ra cũng giả sử rằng dòng tín hiệu đến là dòng Poát–xông với tham số λ = 1/10 khi hệ thống có ít hơn ba tín hiệu và λ = 1/30 nếu hệ thống có từ ba tín hiệu trở lên. Tìm phân phối giới hạn của xích Markov X_t.

8. Xét xích Markov thời gian rời rạc thuần nhất với không gian trạng thái S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5. Giả sử qua khảo sát các mẫu thống kê đã biết được ma trận xác suất chuyển trạng thái (sau mỗi đơn vị thời gian, có thể là phút, tuần, năm, thế hệ…) như sau:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}01 & 0 & 0{,}8 & 0{,}19 & 0 & 0 \\ 0{,}03 & 0 & 0 & 0{,}76 & 0{,}21 & 0 \\ 0{,}09 & 0 & 0 & 0 & 0{,}74 & 0{,}17 \\ 0 & 0{,}19 & 0 & 0 & 0 & 0{,}81 \end{bmatrix}$$

Hãy trả lời các câu hỏi sau: