Chú ý: Có thể chứng minh được rằng nếu hàm thỏa dụng u(.) là hàm lồi (lồi ngặt) thì $\pi \leq 0$ (< 0) với mọi cuộc xổ số. Còn nếu hàm thỏa dụng u(.) là hàm lõm (lõm ngặt) thì $\pi \geq 0$ (> 0) với mọi cuộc xổ số.

Quay lại ví dụ đang xét, do hàm u(.) với đồ thị u_1 đã xây dựng là lồi ngặt nên ta luôn có $\pi = E(x/p) - u^{-1}(E(u/p)) < 0$. Điều này cũng có nghĩa là $u(E(x/p)) < E(u/p)$, tức là độ thỏa dụng của kì vọng lợi nhuận là nhỏ hơn kì vọng thỏa dụng do cuộc xổ số mang lại. Trong trường hợp hàm thỏa dụng có đồ thị u_3 (trên hình V.4) thì $\pi > 0$ và do đó $u(E(x/p)) > E(u/p)$, tức là độ thỏa dụng của kì vọng lợi nhuận là lớn hơn kì vọng thỏa dụng do cuộc xổ số mang lại. Từ các phân tích trên, ta thấy nếu người ra quyết định có hàm thỏa dụng u(.) lồi thì người đó có tính "hướng mạo hiểm" (*Risk Prone*), còn nếu trái lại, u(.) lõm thì có tính "tránh mạo hiểm" (*Risk Averse*). Với u(.) tuyến tính, người ra quyết định có tính hợp lí (*Risk Neutral*).

Điều này được thể hiện khá trực quan trên hình V.4 nếu ta quy lại thang bậc giải thưởng: thay vì các cuộc xổ số "bảo hiểm" đã nói tới trong ví dụ, chúng ta xét các cuộc xổ số thật sự với giải thưởng (được quy lại gốc tọa độ) thuộc vào khoảng 0 USD tới 150000 USD. Với đồ thị u_1 ta thấy, ở các giải thưởng khá cao người ra quyết định có tính "hướng mạo hiểm" vẫn chỉ có độ thỏa dụng (mức độ thỏa mãn) thấp, chẳng hạn giải thưởng 149500 USD chỉ mang lại độ thỏa dụng là 0,7 và độ thỏa mãn tăng rất nhanh khi mức giải thưởng tăng sát 150000 USD. Đồ thị u_3 cũng có thể được phân tích tương tự để thấy tính "tránh mạo hiểm" của người ra quyết định.

Ví dụ 2: Một nhà đầu tư có 10000 USD có thể đầu tư vào thị trường chứng khoán. Anh ta có thể lựa chọn hai công ti X và Y để đầu tư (giả sử rằng hai công ti X và Y là hoàn toàn độc lập với nhau).

Theo tính toán sơ bộ và dự đoán của chuyên gia thì nhà đầu tư có thể nhận được gấp đôi số tiền đầu tư với xác suất 0,6 và có thể mất đi một nửa số tiền đầu tư với xác suất 0,4 khi đầu tư vào một trong hai công ti trên. Anh ta xem xét các lựa chọn sau:

- Đầu tư toàn bộ số tiền vào một trong hai công ti (phương án A).
- Đầu tư 5000 USD vào công ti X (phương án B).
- Đầu tư 5000 USD vào công ti X và 5000 USD vào công ti Y (phương án C).
- Không đầu tư vào hai công ti trên (phương án D).

Ngoài ra, giả sử đã biết hàm thoả dụng của người đầu tư tại một số mức lợi nhuận: $u(-5000) = 0$; $u(-2500) = 0{,}2$; $u(0) = 0{,}4$; $u(2500) = 0{,}7$; $u(5000) = 0{,}9$; $u(10000) = 1$.

Hãy xác định phương án đầu tư dựa trên tiêu chuẩn kì vọng thoả dụng tối đa.

Tính kì vọng thoả dụng cho phương án A: $E(u/p_A) = 0{,}6\times u(10000) + 0{,}4\times u(-5000) = 0{,}6$. Tương tự, $E(u/p_B) = 0{,}6\times u(5000) + 0{,}4\times u(-2500) = 0{,}6\times 0{,}9 + 0{,}4\times 0{,}2 = 0{,}62$

Nhằm tính kì vọng thoả dụng cho phương án C, chúng ta sử dụng hàm sinh

$$(0{,}6a_1 + 0{,}4\,b_1)(0{,}6a_2 + 0{,}4\,b_2) = 0{,}36\,a_1a_2 + 0{,}24a_1b_2 + 0{,}24b_1a_2 + 0{,}16b_1b_2$$

để xác định được các xác suất: xác suất đầu tư vào cả hai công ti cùng lãi là 0,36; xác suất đầu tư vào công ti X lãi và công ti Y lỗ là 0,24; xác suất đầu tư vào công ti X lỗ và công ti Y lãi là 0,24; xác suất đầu tư vào cả hai công ti cùng lỗ là 0,16.

Vậy $E(u/p_C) = 0{,}36\times u(10000) + 0{,}24\times u(2500) + 0{,}24\times u(2500) + 0{,}16\times u(-5000) = 0{,}36\times 1 + 0{,}24\times 0{,}7 + 0{,}24\times 0{,}7 + 0{,}16\times 0 = 0{,}696$. Dễ thấy $E(u/p_D) = 0{,}4$. Do đó, dựa trên tiêu chuẩn kì vọng thỏa dụng tối đa, ta chọn phương án C để đầu tư.

Chú ý: Ra quyết định dựa trên tiêu chuẩn kì vọng thoả dụng tối đa là một phương pháp ra quyết định trong môi trường rủi ro. Cái khó nhất trong phương pháp này là thiết lập được hàm thoả dụng.

Ví dụ 3: Một nhà đầu tư nghiên cứu về cổ phiếu của một công ti và đánh giá rằng các cổ phiếu sẽ tăng giá trong thời gian tới. Hiện tại một cổ phiếu được bán ra với giá 50 USD. Thông qua người môi giới, nhà đầu tư được giới thiệu để mua một hợp đồng như sau: mua 4 USD/quyền mua một cổ phiếu với giá 48 USD/cổ phiếu trong vòng hai tháng nữa. Nhà đầu tư cũng được đề nghị một hợp đồng khác: mua 8 USD/quyền mua một cổ phiếu với giá 48 USD/cổ phiếu trong vòng bốn tháng nữa. Nhà đầu tư thu thập được thông tin về phân phối xác suất của giá cổ phiếu và tổng hợp trong bảng VI.9.

Bảng VI.9. Bảng phân phối xác suất giá cổ phiếu

Giá cổ phiếu	Xác suất của giá cổ phiếu	
	Sau hai tháng	Sau bốn tháng
42	0,05	0,00
48	0,10	0,05
52	0,15	0,10
56	0,20	0,15
60	0,50	0.30
64	0,00	0,40

Nhà đầu tư muốn *xem xét việc mua quyền mua một số cổ phiếu* trong thời hạn các hợp đồng trên. Nếu giá cổ phiếu trên thị trường chứng khoán là cao hơn 48 USD nhà đầu tư sẽ mua với giá 48 USD/cổ phiếu (đã mua quyền mua) và bán ngay chúng theo giá thị trường. Còn nếu giá cổ phiếu không vượt quá 48 USD/cổ phiếu trong thời hạn hợp đồng thì toàn bộ số tiền mua quyền mua các cổ phiếu sẽ bị thất thu.

Nhà đầu tư muốn lựa chọn một trong ba phương án sau:

Phương án A: Mua quyền mua 100 cổ phiếu trong hợp đồng thứ nhất.

Phương án B: Mua quyền mua 100 cổ phiếu trong hợp đồng thứ hai.

Phương án C: Không mua gì cả.

Nhà đầu tư là người tương đối bảo thủ, có tính cách "tránh mạo hiểm" với hàm thỏa dụng được xác định tại một số mức lợi nhuận như trong bảng VI.10.

Bảng VI.10. Giá trị hàm thỏa dụng

Lợi nhuận	Độ thoả dụng
1200	1
800	0,8
400	0,7

0	0,6
-400	0,1
-800	0

Xét phương án A, ta có $E(u/p_A) = 0{,}05\times u(-400) + 0{,}1\times u(-400) + 0{,}15\times u(0) + 0{,}20\times u(400) + 0{,}50\times u(800) + 0\times u(1200) = 0{,}645$. Xét phương án B, ta có $E(u/p_B) = 0\times u(-800) + 0{,}05\times u(-800) + 0{,}1\times u(-400) + 0{,}15\times u(0) + 0{,}30\times u(400) + 0{,}40\times u(800) = 0{,}63$. Với phương án C, $E(u/p_C) = 0{,}6$.Vậy nhà đầu tư quyết định chọn phương án A.

Chú ý: Việc dự báo phân phối xác suất của giá các cổ phiếu cũng là một vấn đề khá phức tạp, nếu các xác suất này chưa biết thì có thể coi là chúng bằng nhau theo *nguyên lí lí lẽ không đầy đủ*. Ngoài ra, với số liệu của ví dụ trên cũng có thể xem xét để lựa chọn nhiều phương án đầu tư khác.

5. LÍ THUYẾT TRÒ CHƠI VÀ ỨNG DỤNG

5.1. Một số khái niệm cơ bản của lí thuyết trò chơi

Ở mục 1, các tiêu chuẩn ra quyết định đã giúp người ra quyết định đưa ra các lựa chọn hợp lí khi đối diện với đối thủ là môi trường bất định, không có trí tuệ.

Trong lí thuyết trò chơi, ta sẽ học cách đưa quyết định khi phải đối diện với một hay nhiều đối thủ có trí thông minh. Trong các *trò chơi*, *được hiểu theo nghĩa rộng*, các đối thủ cạnh tranh nhau đều coi là có trí thông minh như nhau, đều mong muốn lựa chọn cho mình từ một số hữu hạn hoặc vô hạn các phương án hành động một phương án hành động hợp lí nhằm đạt được thành tích tốt nhất hay lợi nhuận tốt nhất. Tuy nhiên, *lí thuyết trò chơi*, trước hết là một lĩnh vực toán học, không có mục tiêu nghiên cứu về việc làm thế nào để thắng được đối thủ, mà tập trung nghiên cứu khảo sát các mâu thuẫn đối kháng khách quan của trò chơi, nhằm giải quyết được vấn đề phát sinh đứng trên quyền lợi của tất cả các bên tham gia.

Các ví dụ điển hình về lí thuyết trò chơi là về các chiến lược phát triển sản phẩm, dịch vụ, thị trường trong nền kinh tế hàng hóa cạnh tranh khu vực và toàn cầu, các chiến lược quân sự...

Sau đây là một số khái niệm cơ bản hay các thuật ngữ then chốt của lí thuyết trò chơi:

– Đối thủ gọi là *người chơi*.

– Một phương án hành động của một người chơi được gọi là một *chiến lược*.

– Khi các đối thủ đã lựa chọn các chiến lược hành động thì trò chơi cho ta một *kết cục* thường định lượng bằng các số được gọi là một *pay-off*. Những tổ hợp chiến lược khác nhau từ phía các người chơi có thể dẫn tới các kết cục hay các pay-off khác nhau của trò chơi.

– Một trò chơi với hai người chơi tham gia, mà trong đó lợi nhuận mà người này thu được chính bằng thất thu của người kia, được gọi là *trò chơi hai người - tổng không*.

Ví dụ 1: Hai người chơi A và B tham gia vào trò chơi, mỗi người có quyền chọn một trong hai mặt của đồng xu: chọn mặt có số S (chiến lược 1) hoặc mặt không có số N (chiến lược 2). Khi đó có thể xảy ra các kết cục sau: (S, S) - tức là người thứ nhất và người thứ hai đều chọn mặt có số, (S, N) - người thứ nhất chọn mặt có số và người thứ hai chọn mặt không có số, (N, S) và (N, N). Các kết cục này được định lượng bởi các pay-off: Nếu kết cục là (S, S) hoặc (N, N) thì A được coi là thắng 1 điểm và B bị mất 1 điểm. Còn nếu kết cục là (S, N) hoặc (N, S) thì A mất 1 điểm và B được 1 điểm.

Đây là trò chơi hai người - tổng không, với các dữ kiện được tổng hợp bởi ma trận cỡ 2×2 như sau:

Người chơi B

$$\text{Người chơi A}\quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} S & N \end{array} \\ \begin{array}{c} S \\ N \end{array} & \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \end{array} = \left[a_{ij}\right]_{2\times 2},$$

với các pay-off mang dấu + biểu thị A thắng (do B thua), còn các pay-off mang dấu - biểu thị anh thua (do B thắng).

– Ma trận sau đây được gọi là *ma trận trò chơi* của trò chơi hai người - tổng không, khi người chơi thứ nhất có thể lựa chọn hành động theo một trong m chiến lược tại mỗi thời điểm, còn người chơi thứ hai có thể lựa chọn hành động theo một trong n chiến lược tại mỗi thời điểm:

$$G = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$$

trong đó a_{ij} là pay-off khi người thứ nhất chơi chiến lược i còn người thứ hai chơi chiến lược j của mình. a_{ij} có dấu + nếu người thứ nhất thắng và có dấu - nếu người thứ nhất thua. Không làm giảm tính tổng quát, ta giả sử trong ma trận trò chơi G không có hai hàng hay hai cột giống hệt nhau.

– Nếu $a_{kj} \geq a_{sj}$, $\forall j = 1, 2, \dots, n$, $k \neq s$ và có ít nhất một chỉ số j* sao cho $a_{kj^*} > a_{sj^*}$ thì ta nói *hàng k là trội hơn hàng s*. Lúc đó có thể bỏ hàng s ra khỏi ma trận trò chơi G, vì người thứ nhất sẽ không bao giờ chơi chiến lược s. Còn nếu $a_{ik} \geq a_{is}$, $\forall i = 1, 2, \dots,$

n, k ≠ s và có ít nhất một chỉ số i* sao cho $a_{i^*k} > a_{i^*s}$ thì ta nói *cột k là trội hơn cột s*. Lúc đó có thể bỏ cột k ra khỏi ma trận trò chơi G, vì người thứ hai sẽ không bao giờ chơi chiến lược k.

Ví dụ 2: Xét trò chơi hai người - tổng không cho bởi ma trận trò chơi sau

$$\begin{array}{cc} & \text{Người chơi B} \\ \text{Người chơi A} & \begin{bmatrix} 8 & 2 & 9 & 9 & 5 \\ 6 & 5 & 7 & 8 & 18 \\ 3 & 2 & 6 & 8 & 10 \\ 7 & 3 & -4 & -3 & 10 \end{bmatrix}. \end{array}$$

Lúc đó, có thể gạch bỏ hàng 3 ra khỏi ma trận trò chơi, sau đó cột 4 ra khỏi ma trận trò chơi để rút gọn ma trận trên.

5.2. Trò chơi hai người - tổng không với chiến lược thuần nhất

Ví dụ 3: Xét trò chơi hai người - tổng không cho bởi ma trận trò chơi sau

$$\begin{array}{cc} & \text{Người chơi B} \\ \text{Người chơi A} & \begin{bmatrix} 8 & 2 & 9 & 5 \\ 6 & 5 & 7 & 18 \\ 7 & 3 & -4 & 10 \end{bmatrix} \end{array}$$

Giải thích: Trong ma trận trò chơi trên $a_{11} = 8$, tức là nếu A chơi chiến lược 1 của mình và B chơi chiến lược 1 của mình thì A thắng 8 còn B thua 8 (đơn vị). Các pay-off khác được giải thích tương tự. Ở đây, m = 3 và n = 4.

Ta thấy nếu A chơi chiến lược 1 của mình thì B sẽ chơi chiến lược 2 để giảm thiểu tối đa lợi nhuận của A và thất thu của B với pay - off tương ứng là $\underset{j=1}{\overset{4}{\text{Min}}}\{a_{1j}\} = 2$. Nếu A chơi chiến lược 2 thì với lí do tương tự B chơi chiến lược 2 để có pay - off là $\underset{j=1}{\overset{4}{\text{Min}}}\{a_{2j}\}$ = 5. còn nếu A chơi chiến lược 3 thì B chơi chiến lược 3 dẫn tới pay - off là $\underset{j=1}{\overset{4}{\text{Min}}}\{a_{3j}\}$ = -4. Do đó để lợi nhuận là lớn nhất có thể, A phải thực hiện *quy tắc Maximin* như sau:

Chọn chiến lược k ứng với $a_{kl} = \underset{i=1}{\overset{3}{\text{Max}}}\{\underset{j=1}{\overset{4}{\text{Min}}}\{a_{ij}\}\} = \underset{i=1}{\overset{3}{\text{Max}}}\{2, 5, -4\} = 5 = a_{22}$.

Như vậy A lựa chọn chiến lược 2. Chiến lược này được gọi là chiến lược Maximin.

Về phía người chơi B, bằng lập luận tương tự, để thất thu là ít nhất có thể, phải thực hiện *quy tắc Minimax* như sau:

Chọn chiến lược s ứng với $a_{qs} = \underset{j=1}{\overset{4}{\text{Min}}}\{\underset{i=1}{\overset{3}{\text{Max}}}\{a_{ij}\}\} = \underset{j=1}{\overset{4}{\text{Min}}}\{8, 5, 9, 10\} = 5 = a_{22}$.

Do đó, B lựa chọn chiến lược 2. Chiến lược này được gọi là chiến lược Minimax.

Định lí 1: Với mọi ma trận trò chơi $G = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ của trò chơi hai người - tổng không, bất đẳng thức sau đây luôn đúng:

$$\underset{j=1}{\overset{n}{\text{Min}}}\{\underset{i=1}{\overset{m}{\text{Max}}}\{a_{ij}\}\} \geq \underset{i=1}{\overset{m}{\text{Max}}}\{\underset{j=1}{\overset{n}{\text{Min}}}\{a_{ij}\}\} \ (*)$$

Hệ quả 1: Nếu $v = \underset{j=1}{\overset{n}{\text{Min}}}\{\underset{i=1}{\overset{m}{\text{Max}}}\{a_{ij}\}\} = \underset{i=1}{\overset{m}{\text{Max}}}\{\underset{j=1}{\overset{n}{\text{Min}}}\{a_{ij}\}\} = a_{ks}$ (**) thì người chơi thứ nhất sẽ quyết định chơi chiến lược k, còn người chơi thứ hai sẽ quyết định chơi chiến lược s.

Nếu điều kiện (**) được thỏa mãn thì trò chơi được gọi là trò chơi với chiến lược thuần nhất (*Pure Strategy*), v được gọi là giá trị của trò chơi (*Game Value*), còn a_{ks} được gọi là điểm yên ngựa (*Saddle Point*). Có thể chỉ ra các ví dụ khi ma trận trò chơi có nhiều hơn một điểm yên ngựa.

5.3. Trò chơi hai người - tổng không với chiến lược hỗn hợp

Ví dụ 4: Xét trò chơi hai người - tổng không cho bởi ma trận trò chơi sau đây (với m = n = 3).

Người chơi B

$$\text{Người chơi A}\begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Chúng ta dễ dàng tính được ngay: $\overline{v} = \underset{j=1}{\overset{n}{\text{Min}}}\{\underset{i=1}{\overset{m}{\text{Max}}}\{a_{ij}\}\} = 6$, còn $\underline{v} = \underset{i=1}{\overset{m}{\text{Max}}}\{\underset{j=1}{\overset{n}{\text{Min}}}\{a_{ij}\}\} = 0$. Do $\overline{v} > \underline{v}$, nên trong ví dụ này điểm yên ngựa không tồn tại và trò chơi không phải là trò chơi với chiến lược thuần nhất.

Giả sử rằng trò chơi trong ví dụ này được lặp lại nhiều lần. Lúc đó, nếu A luôn chỉ chơi chiến lược Maximin thì anh ta chỉ luôn thu được lợi nhuận là 0. Còn nếu B luôn chỉ chơi chiến lược Minimax thì anh ta sẽ luôn bị thất thu là 6. Như vậy, để tăng lợi nhuận trung bình trong một lần chơi lên trên 0, A có thể nghĩ tới một chiến lược hỗn hợp: thực hiện một trong bốn chiến lược của mình một cách xen kẽ với các tần suất (xác xuất thực nghiệm) nhất định, lúc chiến lược này lúc chiến lược khác. Về phần B, để giảm thất thu trung bình trong một lần chơi xuống dưới 6, một chiến lược hỗn hợp cũng cần được xem xét.

Định nghĩa 1: Xét trò chơi hai người - tổng không. Tại mỗi thời điểm, người thứ nhất có thể hành động theo một trong m chiến lược $a_1, a_2, ..., a_m$, còn người thứ hai có thể hành động theo một trong n chiến lược $b_1, b_2, ..., b_n$. Một chiến lược hỗn hợp của người thứ nhất là: chơi chiến lược a_1 với xác suất x_1, chiến lược a_2 với xác suất x_2, ..., chiến lược a_m với xác suất x_m, với $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ \forall i,\ x_i \geq 0$. Còn một chiến lược hỗn hợp của người thứ hai là: chơi chiến lược b_1 với xác suất y_1, chiến lược b_2 với xác suất y_2,..., chiến lược b_n với xác suất y_n với $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ \forall j,\ y_j \geq 0$.

Quay lại ví dụ nêu trên, để xác định được chiến lược hỗn hợp tốt nhất của mình, người chơi A cần tìm được phân phối xác suất $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ để cực đại hóa kì vọng pay – off thấp nhất trong các cột, tức là cần giải bài toán sau:

$$\max_{x=(x_1,...,x_m)} \left\{ \text{Min}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_i, ..., \sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i, \right) \right\} \quad (***)$$

Đây là tiêu chuẩn Maximin kì vọng lợi nhuận của từng cột. Điều này có nghĩa là: Nếu một phân phối xác suất $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ đã được chọn thì người chơi B luôn chọn chơi chiến lược ứng với cột có kì vọng pay – off thấp nhất để giảm thiểu thất thu của mình. Do đó, người chơi A bắt buộc phải chọn phân phối xác suất x theo tiêu chuẩn Maximin.

Còn để xác định được chiến lược hỗn hợp tốt nhất của mình, người chơi B cần tìm được phân phối xác suất $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ để cực tiểu hóa kì vọng pay – off cao nhất trong các hàng, tức là cần giải bài toán sau:

$$\min_{y=(y_1,...,y_n)} \left\{ \text{Max}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}y_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}y_j, ..., \sum_{j=1}^{n} a_{mj}y_j, \right) \right\} \quad (****)$$

Đây là tiêu chuẩn Minimax kì vọng thất thu của từng hàng. Điều này có nghĩa là: Nếu một phân phối xác suất $y = (y_1, y_2,..., y_n)$ đã được chọn thì người chơi A luôn chọn chơi chiến lược ứng với cột có kì vọng pay - off cao nhất để tăng lợi nhuận của mình. Do đó, người chơi B bắt buộc phải chọn phân phối xác suất y theo tiêu chuẩn Maximin.

Chú ý: Nếu chỉ xét các trường hợp véc tơ phân phối xác suất $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ có đúng một tọa độ bằng 1, còn các tọa độ bằng 0 thì (***) chính là quy tắc Maximin trong mục 5.2. Còn nếu chỉ xét các trường hợp véc tơ phân phối xác suất $y = (y_1, y_2,..., y_n)$ có đúng một tọa độ bằng 1, còn các tọa độ bằng 0 thì (****) chính là quy tắc Minimax trong mục 5.2.

Định lí 2: Với mọi phân phối xác suất $x = (x_1, x_2,..., x_m)$ và mọi phân phối xác suất $y = (y_1, y_2,..., y_n)$ ta luôn có: