

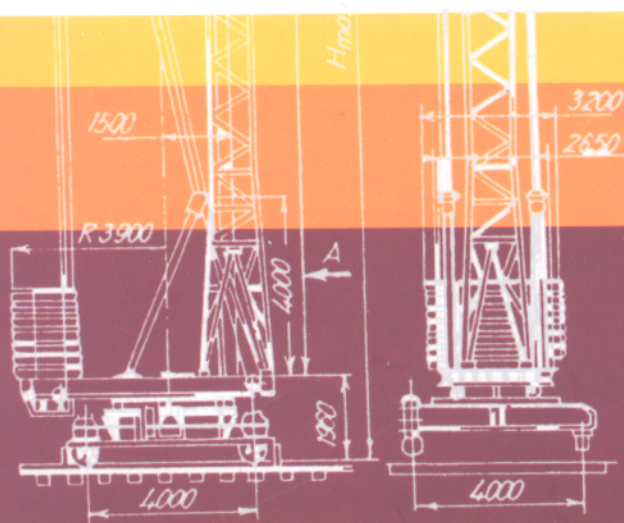


1956 - 2006

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
50 NĂM XÂY DỰNG VÀ PHÁT TRIỂN

PGS. TS. ĐẶNG VIỆT CƯỜNG

Cơ ứng dụng trong kỹ thuật



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT



PGS. TS. ĐẶNG VIỆT CƯƠNG

CƠ ỨNG DỤNG TRONG KỸ THUẬT



**NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI**

LỜI NÓI ĐẦU

Như một nguyên tắc, các ngành kỹ thuật, công nghệ ở tất cả các bậc học đều cần phải và được trang bị các kiến thức về cơ học. Tuy nhiên, cơ học là một lĩnh vực rất rộng bao gồm nhiều môn học như cơ học lý thuyết, nguyên lý máy, chi tiết máy, sức bền vật liệu, cơ học kết cấu, lý thuyết đàn hồi, lý thuyết dẻo, lý thuyết từ biến... Do nhiều nguyên nhân mà thời gian đào tạo ở các bậc học có xu hướng rút ngắn đối với mọi quốc gia. Vì vậy, việc chọn một kết cấu giáo trình hợp lý về cơ học vật rắn nói trên để cho người học có đủ kiến thức tiếp thu các môn học nối tiếp, đồng thời có thể nghiên cứu những vấn đề khác nhau của cơ học là một đề tài nóng bỏng nhất của ngày hôm nay ở nước ta trong việc đào tạo các kỹ sư làm việc trong lĩnh vực công nghiệp.

Hiện nay nhiều trường đại học công nghệ trong nước và trên thế giới đã không còn giảng dạy riêng rẽ các môn cơ học nêu trên nữa mà người ta giảng dạy chúng trong một giáo trình thống nhất. Môn học này ở Việt Nam lần đầu tiên được tổ chức vào tháng 10 năm 1970 do một nhóm nhà giáo mà tác giả là một trong số đó, đồng thời là những nhà khoa học đầy nhiệt tâm của trường ĐHBK Hà Nội nhận trách nhiệm tổ chức, xây dựng, đào tạo và giảng dạy. Mục đích của môn học mang tính khoa học liên hoàn này là nhằm cung cấp những kiến thức cơ bản nhất về cơ học và những ứng dụng kỹ thuật của nó cho sinh viên các trường đại học kỹ thuật và công nghệ.

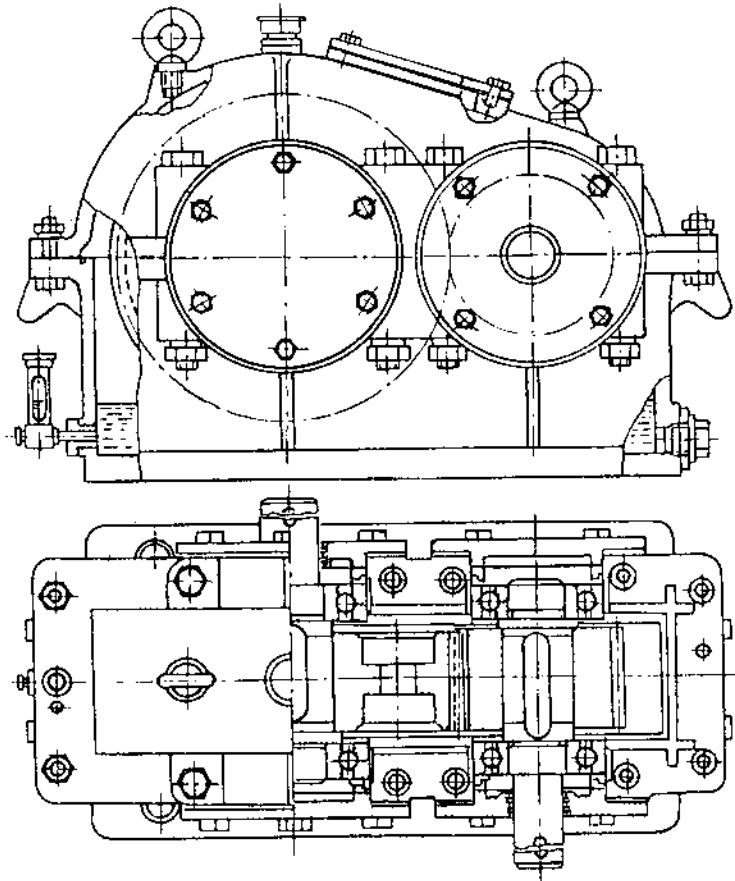
Với mục đích hoàn thiện hơn nữa nội dung các bài giảng, đặc biệt là tính ứng dụng vào kỹ thuật của nội dung đó và khắc phục mâu thuẫn gay gắt giữa nội dung cần truyền đạt với quỹ thời gian khi thực hành giảng dạy các môn cơ học nói trên, đồng thời giúp các cán bộ trẻ mới bước vào nghề và các kỹ sư đang hoạt động trong các lĩnh vực công nghiệp, chúng tôi thấy cần phải giới thiệu cuốn **CƠ ỨNG DỤNG TRONG KỸ THUẬT** cùng các bạn. Vẫn biết, giới thiệu là cần thiết nhưng cái chính là hữu xạ tự nhiên hương. Cuốn sách được biên

soạn công phu, chặt chẽ với sự cập nhật chọn lọc các thông tin mới nhất vào việc xây dựng hệ thống lý thuyết liên hoàn và nhất quán của môn học này. Mặc dù rất cố gắng trong biên soạn nhưng chắc chắn không tránh khỏi thiếu sót. Chúng tôi rất mong và cảm ơn sự đóng góp ý kiến trao đổi của các chuyên gia, các thầy giáo và tất cả các bạn sử dụng và đọc cuốn sách này để cuốn sách được hoàn chỉnh hơn trong lần xuất bản sau. Chúng tôi xin chân thành cảm ơn Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, các bạn đồng nghiệp đã khích lệ và giúp đỡ chúng tôi hoàn thành cuốn sách.

Tác giả

PHẦN I

CƠ HỌC VẬT RẮN TUYỆT ĐỐI



KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ CƠ HỌC CÁC VẬT RẮN

Chuyển động là thuộc tính cơ bản và là hình thức tồn tại của vật chất. Vì thế, vật chất và chuyển động không thể tách rời nhau. Trong môn học này chúng ta chỉ nghiên cứu một loại chuyển động đơn giản nhất: Đó là chuyển động cơ học. Chuyển động cơ học là sự thay đổi vị trí của đối tượng (điểm, vật) trong không gian theo thời gian. Không gian và thời gian được hiểu là chúng có tính tuyệt đối không phụ thuộc vào vật chất và chuyển động. Không gian trống rỗng, nghiệm đúng các tiên đề và các định lý của hình học Oclit (Euclide), còn thời gian được thừa nhận là một đối số độc lập khi khảo sát chuyển động của đối tượng.

I. MÔ HÌNH NGHIÊN CỨU

Đối tượng được nghiên cứu chủ yếu trong môn học này là vật rắn và hệ vật rắn gồm hai loại sau đây:

a) Vật rắn tuyệt đối:

Vật rắn tuyệt đối là những vật rắn mà khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ của nó không thay đổi trong quá trình chuyển động. Khi những vật mà kích thước và hình dáng có thể bỏ qua trong các tính toán mà không ảnh hưởng đến kết quả thì được gọi là điểm.

b) Vật rắn biến dạng:

Vật rắn biến dạng là những vật rắn mang tính vật chất. Do đó khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ trong nó có thể bị thay đổi dưới tác dụng của môi trường bên ngoài.

c) Hệ vật rắn:

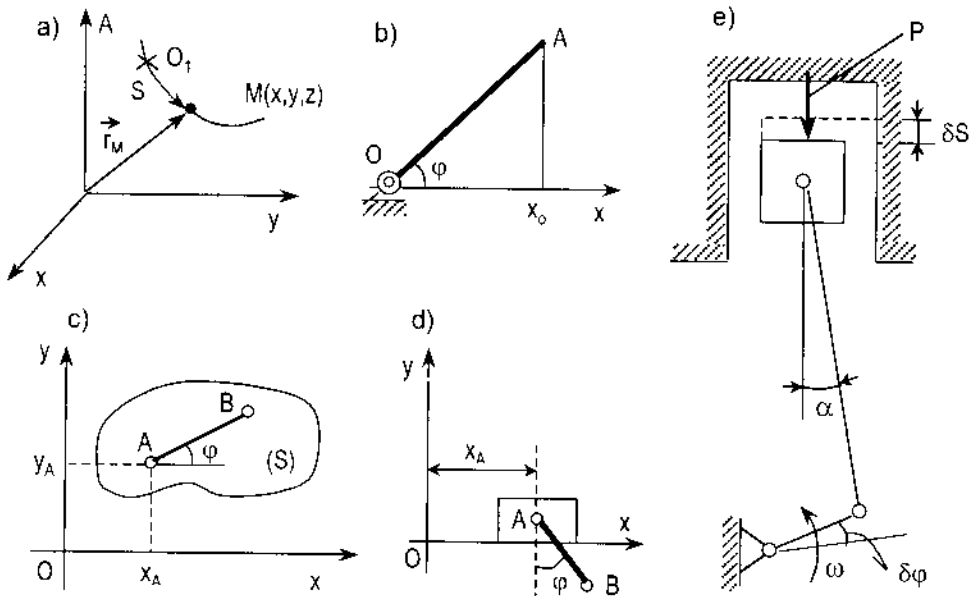
Tập hợp tất cả các vật rắn có chuyển động phụ thuộc nhau được gọi là một hệ vật rắn hay một cơ hệ. Trong môn học này ta quan tâm tới các cơ hệ hay gặp trong các thiết bị và máy móc.

II. TOẠ ĐỘ SUY RỘNG - CHUYỂN ĐỘNG KHẢ DI VÀ BẬC TỰ DO

1. Toạ độ suy rộng

Xét vị trí của một vật thể tức là xét vị trí tương đối của nó đối với một vật lấy mốc để so sánh. Vật lấy mốc để so sánh được gọi là hệ quy chiếu. Vị trí của một đối tượng được xét nào đó đối với hệ quy chiếu đã chọn thường được xác định bởi một tập hợp những thông số gọi là những thông số định vị (hình 1-1a, b, c, d).

* *Toạ độ suy rộng là tập hợp những thông số định vị của vật thể đối với hệ quy chiếu đã chọn.*



Hình 1-1

Trên hình 1-1a mô tả ba cách xác định vị trí của điểm M trong không gian:

- Cách 1: ba toạ độ Đề-các x, y, z.
- Cách 2: bán kính vectơ \vec{r}_M .
- Cách 3: khi biết đường cong mà điểm M ở trên đó thì có thể dùng toạ độ cong $S = \overline{O_1M}$.

Trên hình 1-1b mô tả thanh OA quay quanh O cố định trong mặt phẳng hình vẽ. Vị trí của OA có thể được xác định chỉ bởi góc φ hoặc hình chiếu OA trên Ox.

Trên hình 1-1c mô tả một miếng cứng (S) chuyển động trong mặt phẳng xOy. Vị trí của (S) hoàn toàn được xác định bởi đoạn AB gắn cứng trên nó. Có thể xác định AB nhờ tọa độ của A (x_A, y_A) và góc φ , cũng có thể xác định AB nhờ tọa độ A (x_A, y_A) và B (x_B, y_B).

Trên hình 1-1d mô tả một con lắc vật lý chuyển động theo phương Ox. Vị trí của con lắc được xác định nếu biết x_A và φ .

Trên hình 1-1e mô tả một cơ hệ (cơ cấu tay quay thanh truyền) vị trí của cơ cấu này ở mỗi thời điểm chuyển động của nó được xác định, nếu biết góc α .

Qua các ví dụ trên ta thấy để xác định vị trí của một đối tượng có thể dùng tọa độ Đề-các, tọa độ cong (tọa độ tự nhiên), góc lệch và dùng hỗn hợp các tọa độ đó. Thuật ngữ tọa độ suy rộng ra đời là như vậy

Số tọa độ suy rộng độc lập với nhau và vừa đủ để xác định vị trí của cơ hệ được gọi là số tọa độ suy rộng đủ. Nếu giữa những tọa độ suy rộng có mối liên hệ toán học với nhau ta có số tọa độ suy rộng dư (hình 1-1c). Phương trình biểu diễn quan hệ đó gọi là phương trình liên kết. Trong trường hợp hình 1-1c, phương trình này có dạng:

$$\overline{AB} = l = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

2. Chuyển vị khả dĩ và số bậc tự do của hệ

* Liên kết là những điều kiện hình học hay động học ràng buộc chuyển động tự do của một cơ hệ.

* Tập hợp những chuyển vị vô cùng bé tùy ý và phù hợp với liên kết (không phá vỡ liên kết) của hệ gọi là chuyển vị khả dĩ (CVKD) của hệ và được ký hiệu là δ_c (hình 1-1e).

* Số bậc tự do của hệ là số chuyển vị khả dĩ độc lập và cũng là số tọa độ suy rộng đủ.

III. KHỚP ĐỘNG - CHUỖI ĐỘNG VÀ CƠ CẤU

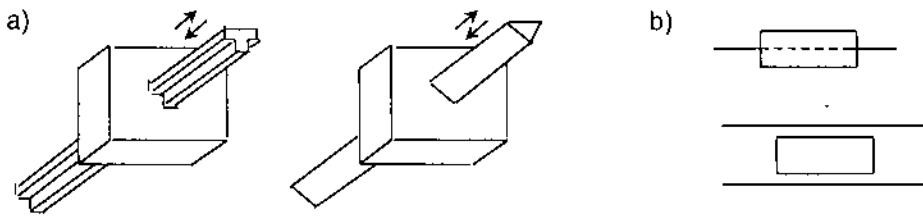
1. Khớp động

Xét hai vật có biên giới phân biệt tựa trên nhau. Ta nói hai vật này nối động với nhau nếu khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ của chúng thay đổi trong quá trình chuyển động của hệ. Nếu khoảng cách không đổi thì ta nói hai vật thể đó

đã nối tình hay ghép cứng với nhau và cơ hệ tương đương với một vật rắn tuyệt đối. Một vật được nối động với một vật khác, gọi là một khâu. Tập hợp các điểm tựa của hai biên của hai khâu được gọi là khớp động, tập hợp các điểm tựa thuộc mỗi biên giới gọi là thành phần khớp động hay khớp chờ.

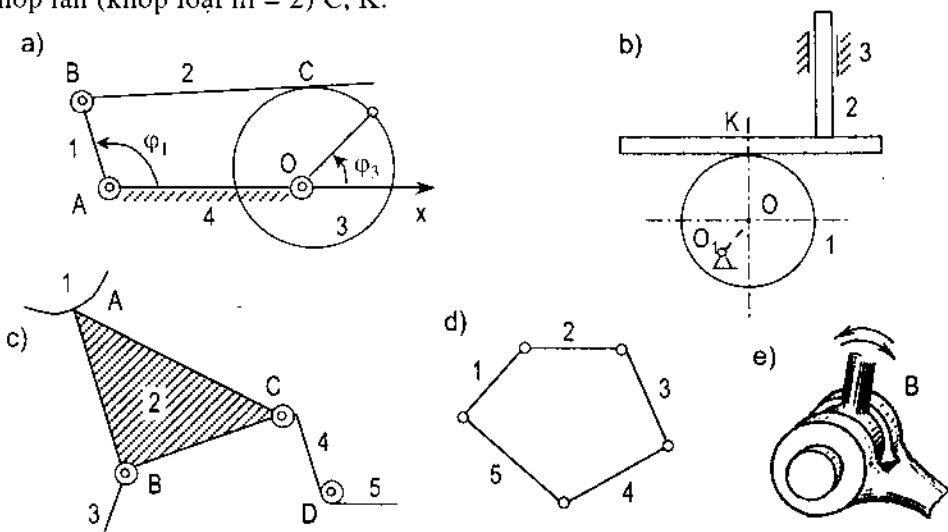
Phân loại khớp động và ký hiệu

Khớp động có thể phân loại theo đặc trưng động học, nghĩa là ta sẽ gọi khớp động là khớp động loại m , nếu số CVKD độc lập của khâu khảo sát so với khâu còn lại được lấy làm hệ quy chiếu bằng m . Trong giáo trình này ta chỉ xét khớp động phẳng tức là mỗi điểm của khâu chuyển động trong một mặt phẳng song song nhau. Như thế ta sẽ chỉ có khớp loại một (nếu là khớp quay hoặc khớp tịnh tiến) hay khớp loại 2 (nếu là khớp lăn). Trên hình 1-2a, b mô tả khớp tịnh tiến và sơ đồ quy ước.



Hình 1-2

Trên hình 1-3a, b, c mô tả các khớp quay (khớp loại $m = 1$) A, B, O, O₁ và khớp lăn (khớp loại $m = 2$) C, K.



Hình 1-3

2. Chuỗi động và cơ cấu

Một cơ hệ gồm nhiều khâu nối động với nhau gọi là một chuỗi động. Trong một chuỗi động nếu mỗi khâu được nối với ít nhất hai khâu khác thì ta có một chuỗi động kín. Trường hợp ngược lại, ta có một chuỗi động hở. Để biểu diễn các cơ cấu và chuỗi động ta thường dùng lược đồ cấu trúc (hình 1-3c, d).

** Cơ cấu là một chuỗi động kín có một khâu cố định. Khâu cố định trong một cơ cấu gọi là giá. Người ta quy ước vẽ thêm các nét gạch nhỏ để đặc trưng cho giá (hình 1-3a, b).*

3. Bậc tự do của cơ cấu phẳng

Cơ cấu phẳng là cơ cấu trong đó các điểm của các khâu chuyển động trong những mặt phẳng song song với nhau. Trong một cơ cấu, khâu có qui luật chuyển động cho trước gọi là khâu dẫn, các khâu còn lại gọi là khâu bị dẫn hoặc thanh truyền.

Bậc tự do của cơ cấu phẳng được xác định như sau

Gọi k là số lượng khâu động của một cơ cấu, nếu các khâu để riêng rẽ thì mỗi khâu có 3 bậc tự do, k khâu động có $3k$ bậc tự do. Nhưng các khâu này lại nối với nhau bằng p_1 khớp loại 1 (khớp quay hoặc khớp tịnh tiến) thành thử chúng bị giảm mất $2p_1$ bậc tự do. Ngoài p_1 khớp loại 1 nếu chúng còn nối với nhau bằng p_2 khớp loại 2 nữa (khớp lăn) thì số bậc tự do lại giảm thêm p_2 . Cuối cùng số bậc tự do của cơ cấu chỉ còn lại là:

$$W = 3k - 2p_1 - p_2$$

k là số lượng khâu động của cơ cấu;

p_1 là số lượng khớp quay hoặc khớp tịnh tiến;

p_2 là số lượng khớp lăn.

Chú ý:

- Khớp động là tập hợp các điểm tựa giữa biên giới của *hai khâu* cho nên nếu một nút mà có 3 khâu chẳng hạn thì ở đó có hai khớp.

- Nếu $W = 0$ ta có hệ hoặc kết cấu tĩnh định.

- Nếu $W < 0$ ta có hệ hoặc kết cấu siêu tĩnh.

IV. VẬT RẮN TỰ DO VÀ VẬT RẮN CHIU LIÊN KẾT

Một hệ chất điểm bất biến và liên tục được gọi là một *vật rắn tuyệt đối*. Các vật rắn thường gặp lại có thể có liên quan đến nhau hoặc không, ta có *vật rắn không tự do* và *vật rắn tự do*.

* *Vật rắn tự do là vật rắn có thể thực hiện mọi di chuyển vô cùng bé từ vị trí đang xét sang những vị trí lân cận của nó. Trái lại, nếu một số di chuyển của nó bị cản trở thì vật ấy gọi là vật rắn không tự do.*

1. Liên kết và phản lực liên kết

Liên kết là những điều kiện cản trở chuyển vị tự do của vật đang khảo sát.

Trong một tập hợp các vật rắn nếu ta quan tâm tới vật nào thì vật ấy gọi là *vật khảo sát*. Các vật cản trở chuyển vị tự do của vật khảo sát gọi là *vật gây liên kết*. Tác dụng tương hỗ giữa vật khảo sát và vật gây liên kết gọi là *lực liên kết*.

Lực mà vật gây liên kết tác dụng lên vật khảo sát gọi là phản lực liên kết.

* • *Phản lực liên kết cùng phương, trái chiều với chiều chuyển động bị cản trở. Cường độ của phản lực liên kết phụ thuộc vào lực tác dụng lên vật khảo sát.*

• *Phản lực liên kết chỉ xảy ra ở vùng tiếp xúc giữa vật khảo sát và vật gây liên kết.*

Tiên đề giải phóng liên kết sau đây cho phép áp dụng các định luật Newton vào việc nghiên cứu cơ hệ không tự do.

* *Trạng thái chuyển động hay đứng yên của hệ không thay đổi khi thay thế các liên kết đặt lên hệ bằng các phản lực liên kết tương ứng.*

2. Các loại liên kết thường gặp

Trên hình 1-4 là các loại liên kết thường gặp có một phản lực liên kết, các ký hiệu biểu diễn chúng và các phản lực liên kết tương ứng. Liên kết này gọi là liên kết gối tựa cứng di động.

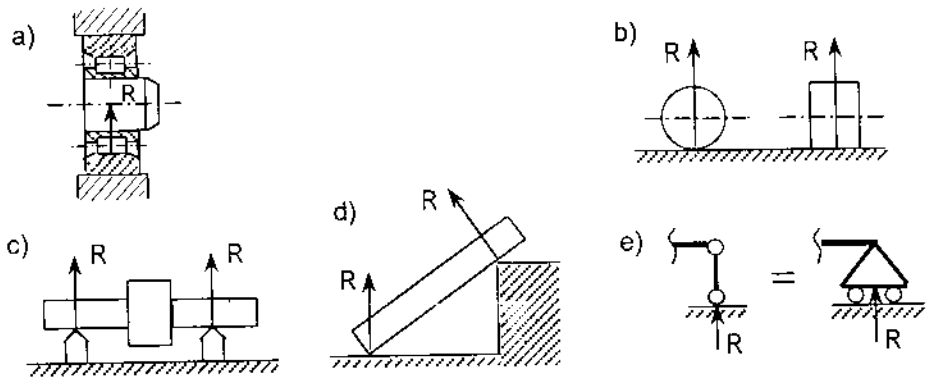
Trên hình 1-5a là liên ngàm cứng thực và ký hiệu mô tả. Liên kết này có ba phản lực: \vec{R} , \vec{H} , \vec{M}^* .

Trên hình 1-5b mô tả liên kết hai phản lực \vec{R} và \vec{H} và ký hiệu mô tả tương ứng. Liên kết này gọi là liên kết gối tựa cứng bất động.

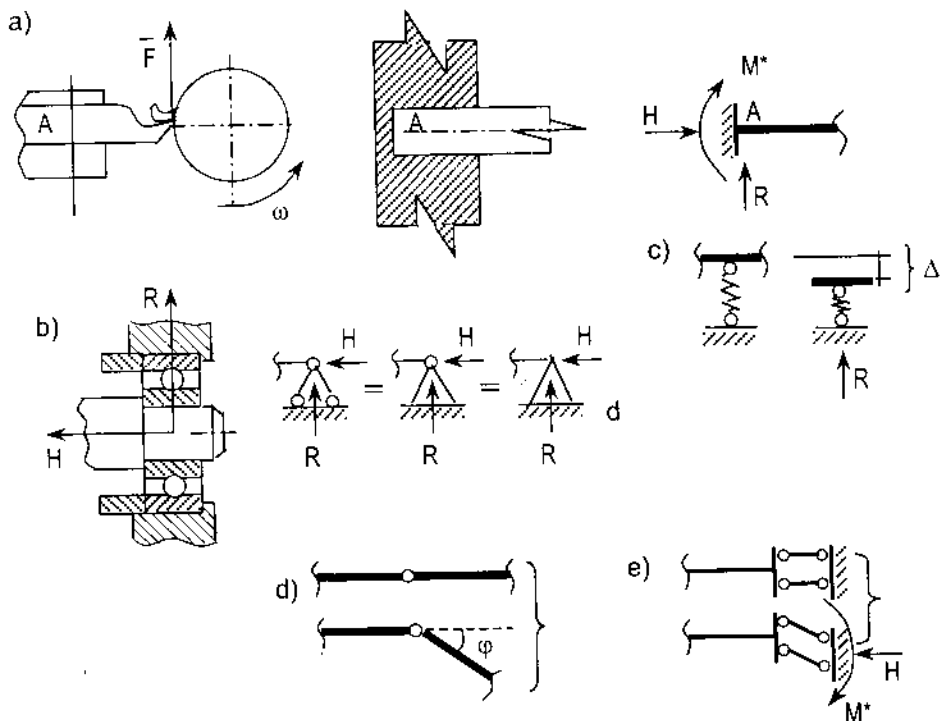
Liên kết trên hình 1-5c là liên kết gối tựa đàn hồi một phản lực.

Liên kết mô tả trên hình 1-5d là liên kết khớp quay (bản lề) trung gian giữa hai phần của đối tượng.

Hình 1-5e mô tả liên kết ngàm trượt cố hai phản lực \vec{H} và \vec{M}^* .



Hình 1-4



Hình 1-5

CHƯƠNG 2

ĐỘNG HỌC

Nội dung của động học là nghiên cứu các đặc trưng của chuyển động (phương trình chuyển động, quỹ đạo, vận tốc, gia tốc) của một đối tượng (điểm, vật, cơ hệ) độc lập với nguyên nhân gây ra chuyển động đó.

I. CÁC ĐỊNH NGHĨA

Giả sử chuyển động của điểm M được xét trong hệ quy chiếu cố định R_i (O_i, x_i, y_i, z_i). Vị trí của nó được xác định bằng vectơ vị trí ở thời điểm t (hình 2-1).

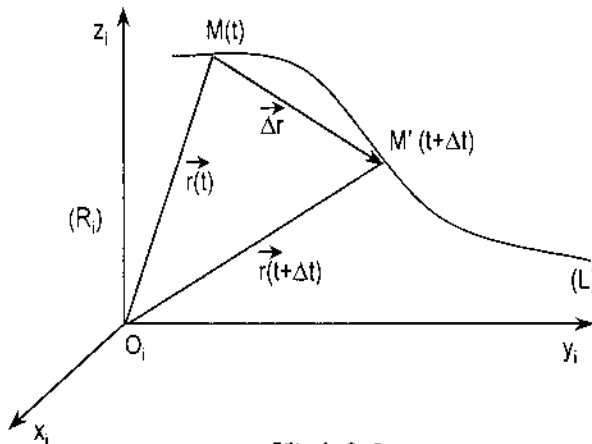
$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$$

Gọi: $M(t)$ là vị trí của điểm ở thời điểm t .

\vec{MM}' là vectơ chuyển vị của M.

$M'(t+\Delta t)$ là vị trí của nó ở thời điểm $(t+\Delta t)$.

a) Quỹ đạo L của điểm M



Hình 2-1

Đường (L) mà M vẽ ra trong không gian trong quá trình chuyển động gọi là quỹ đạo chuyển động đối với hệ quy chiếu R_1 . Nếu L là đường thẳng thì chuyển động của điểm gọi là chuyển động thẳng. Nếu L là đường cong ta nói chuyển động của điểm là chuyển động cong.

b) Vectơ vận tốc và vectơ gia tốc

Vectơ vận tốc trung bình được định nghĩa như sau:

$$\vec{V}_M = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Vectơ gia tốc trung bình giữa hai thời điểm t và $(t + \Delta t)$:

$$\vec{W}_M = \frac{\vec{V}(t + \Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$$

Vận tốc tức thời và gia tốc tức thời là các giới hạn sau đây:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{V}_M = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d^i \vec{O}_i M}{dt}$$

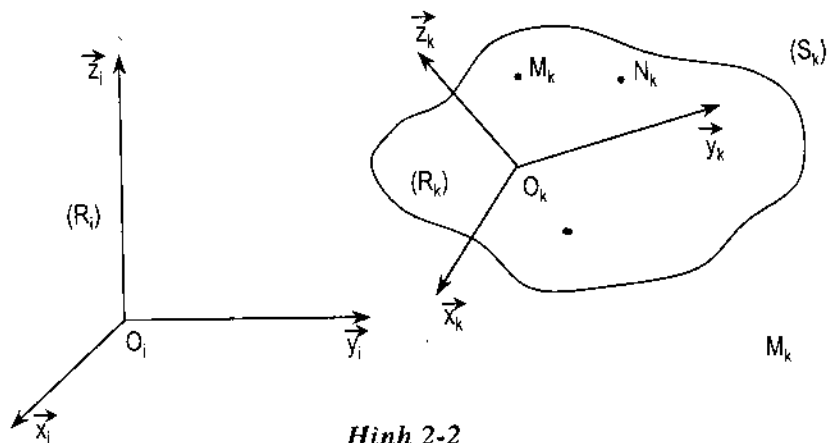
$$\vec{W}_M = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^i \vec{V}^i(M)}{dt}$$

Chỉ số i gắn với hệ quy chiếu mà trên đó ta khảo sát chuyển động.

II. TRƯỜNG VẬN TỐC VÀ GIA TỐC TRONG VẬT RẮN - TOOCXO ĐỘNG HỌC

Vận tốc của mỗi điểm M_k của vật rắn S_k được xét trong hệ quy chiếu R_1 là:

$$V^i(M_k) = \frac{d^i \vec{O}_i M_k}{dt}$$



Hình 2-2

Cho hai điểm M_k và N_k thuộc S_k được gắn trên hệ tọa độ (R_k) .

Vì (S_k) là vật rắn tuyệt đối, nên vị trí tương đối của $\overrightarrow{O_k N_k}$ và $\overrightarrow{O_k M_k}$ là bất biến theo thời gian. Chúng ta hãy tìm quan hệ vận tốc giữa $\overrightarrow{V^i}(N_k)$ và $\overrightarrow{V^i}(M_k)$.

Theo quy tắc đạo hàm vectơ, ta có:

$$\overrightarrow{V^i}(M_k) = \frac{d^i \overrightarrow{O_i M_k}}{dt} = \frac{d^k \overrightarrow{O_i M_k}}{dt} + \overrightarrow{\Omega_k^i} \wedge \overrightarrow{O_i M_k}$$

$$\overrightarrow{V^i}(N_k) = \frac{d^i \overrightarrow{O_i N_k}}{dt} = \frac{d^k \overrightarrow{O_i N_k}}{dt} + \overrightarrow{\Omega_k^i} \wedge \overrightarrow{O_i N_k}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V^i}(N_k) - \overrightarrow{V^i}(M_k) &= \frac{d^k}{dt} (\overrightarrow{O_i N_k} - \overrightarrow{O_i M_k}) + \overrightarrow{\Omega_k^i} \wedge (\overrightarrow{O_i N_k} - \overrightarrow{O_i M_k}) \\ &= \frac{d^k}{dt} (\overrightarrow{M_k N_k}) + \overrightarrow{\Omega_k^i} \wedge (\overrightarrow{M_k N_k}) \end{aligned}$$

Nhưng $\overrightarrow{M_k N_k} = \text{cte}$ trong (R_k) nên $\frac{d^k \overrightarrow{M_k N_k}}{dt} = 0$.

$$\text{Suy ra: } \overrightarrow{V^i}(N_k) = \overrightarrow{V^i}(M_k) + \overrightarrow{\Omega_k^i} \wedge \overrightarrow{M_k N_k} \quad (2-1)$$

Biểu thức (2-1) cho ta quan hệ vận tốc giữa các điểm N_k và M_k . Tính chất của (2-1) là tính chất của một toạ độ. Ta có thể phát biểu như sau:

Trường vận tốc của các điểm trong vật rắn khi vật này chuyển động là một trường phản đối xứng. Trường đó cùng với vectơ quay $\overrightarrow{\Omega_k^i}$ lập thành một toạ độ mà ta gọi là toạ độ động học. Mômen của toạ độ là vận tốc của các điểm và vectơ của toạ độ là vectơ vận tốc góc.

→ Nếu xác định được vận tốc tại một điểm bất kỳ của vật rắn và vectơ quay $\overrightarrow{\Omega_k^i}$ thì trường vận tốc trong vật rắn là hoàn toàn được xác định theo (2-1).

1. Tính chất đẳng chiều của trường vận tốc trong vật rắn

Vì trường vận tốc là một toạ độ nên nó có tính chất đẳng chiều. Thực vậy nếu ta nhân vô hướng cả hai vế của (2-1) với $\overrightarrow{M_k N_k}$ ta sẽ được:

$$\overrightarrow{V^i}(N_k) \cdot \overrightarrow{M_k N_k} = \overrightarrow{V^i}(M_k) \cdot \overrightarrow{M_k N_k} + \overrightarrow{M_k N_k} \cdot (\overrightarrow{\Omega_k^i} \wedge \overrightarrow{M_k N_k})$$

Do $\overrightarrow{M_k N_k} \cdot (\overrightarrow{\Omega_k^i} \wedge \overrightarrow{M_k N_k}) = 0$, nên:

$$\vec{V}^i(N_k) \cdot \vec{M}_k N_k = \vec{V}^i(M_k) \cdot \vec{M}_k N_k \quad \text{hay}$$

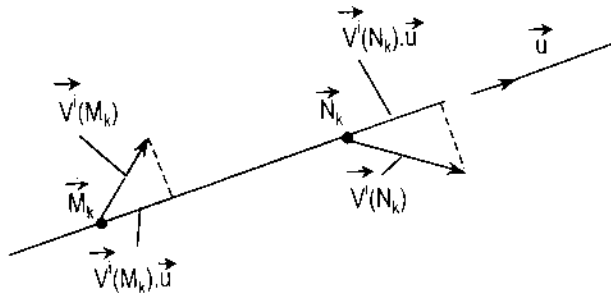
$$\vec{V}^i(N_k) \cdot \vec{u} = \vec{V}^i(M_k) \cdot \vec{u}$$

Trong đó \vec{u} là vectơ đơn vị trên giá $M_k N_k$, còn $\vec{M}_k N_k = \overline{M_k N_k} \cdot \vec{u}$. Kết quả (2-2) được phát biểu dưới dạng một định lý hình chiếu vận tốc sau đây:

Định lý: “Hình chiếu vận tốc của hai điểm thuộc vật rắn chuyển động lên phương đi qua hai điểm đó thì bằng nhau” (hình 2-3).

Biểu thức của định lý:

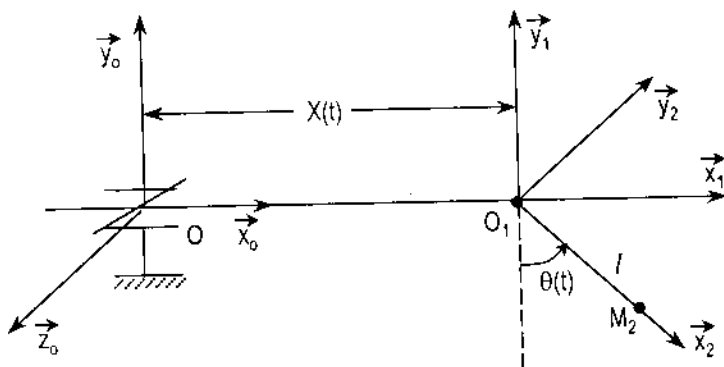
$$hc \vec{V}^i(N_k) = hc \vec{V}^i(M_k) \vec{u} \quad (2-2^*)$$



Hình 2-3

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Hãy xác định vận tốc của điểm M_2 của con lắc Ôle (Euler) so với hệ tọa độ R_0 , (hình 2-4).



Hình 2-4

$$\overrightarrow{OO_1} = X(t)\vec{x}_1, \quad \overrightarrow{O_1M_2} = l\vec{x}_2, \quad \vec{\theta} = (-\vec{y}_1, \vec{x}_2), \quad \overrightarrow{V_o(M_2)}?$$

Giải:

* Phương án 1:

$$\overrightarrow{V_o(M_2)} = \frac{d^0 \overrightarrow{OM_2}}{dt} \quad \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M_2}$$

$$\overrightarrow{OO_1} = \begin{pmatrix} X(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}; \quad \overrightarrow{O_1M_2} = \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_2} = \begin{pmatrix} l \sin \theta \\ -l \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}; \quad \overrightarrow{OM_2} = \begin{pmatrix} X + l \sin \theta \\ -l \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$$

Ta lấy đạo hàm $\overrightarrow{OM_2}$ so với (R_0) :

$$\frac{d^0 \overrightarrow{OM_2}}{dt} = \frac{d^1 \overrightarrow{OM_2}}{dt} + \overrightarrow{\Omega_1^0} \wedge \overrightarrow{OM_2}$$

$\overrightarrow{\Omega_1^0} = \vec{0}$ vì hai hệ tọa độ (R_0) và (R_1) song song với nhau. Do đó:

$$\overrightarrow{V^0(M_2)} = \begin{pmatrix} \dot{X} + l\dot{\theta} \cos \theta \\ l\dot{\theta} \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$$

* Phương án 2:

$\overrightarrow{O_1M_2}$ gắn liền với (R_2) .

$$\overrightarrow{V^0(M_2)} = \overrightarrow{V^0(O_1)} + \overrightarrow{\Omega_2^0} \wedge \overrightarrow{O_1M_2} \quad (a)$$

$$-\overrightarrow{V^0(O_1)} = \frac{d^0 \overrightarrow{OO_1}}{dt} = \frac{d^1 \overrightarrow{OO_1}}{dt} + \overrightarrow{\Omega_1^0} \wedge \overrightarrow{OO_1} = \frac{d^1 \overrightarrow{OO_1}}{dt}$$

$$\overrightarrow{OO_1} = \begin{pmatrix} X \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} \Rightarrow \overrightarrow{V^0(O_1)} = \begin{pmatrix} \dot{X} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} \quad \overrightarrow{\Omega_1^0} = \vec{0}$$

$$-\overrightarrow{\Omega_2^0} = \overrightarrow{\Omega_2^1} + \overrightarrow{\Omega_1^0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{R_1}$$

Thay các kết quả tính toán này vào (a) ta rút ra:

$$\overrightarrow{V^0(M_2)} = \begin{matrix} \begin{matrix} \dot{X} \\ O \\ O \end{matrix} \\ R_1 \end{matrix} + \begin{matrix} \begin{matrix} O \\ O \\ \dot{\theta} \end{matrix} \\ R_1 \end{matrix} \wedge \begin{matrix} \begin{matrix} l \sin \theta \\ -l \cos \theta \\ O \end{matrix} \\ R_1 \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{matrix} \dot{X} + l \dot{\theta} \cos \theta \\ l \dot{\theta} \sin \theta \\ O \end{matrix} \\ R_1 \end{matrix}$$

3. Trường gia tốc trong vật rắn chuyển động

Gia tốc của điểm $N_k \in R_k$ đối với hệ quy chiếu (R_1) được xác định bởi:

$$\overrightarrow{W^i(N_k)} = \frac{d^i}{dt} \overrightarrow{V^i(N_k)}$$

Vậy quan hệ giữa $\overrightarrow{W^i(N_k)}$ và $\overrightarrow{W^i(M_k)}$ như thế nào?

Ta đã biết rằng $\overrightarrow{V^i(N_k)} = \overrightarrow{V^i(M_k)} + \overrightarrow{\Omega_k^i} \wedge \overrightarrow{M_k N_k}$

$$\overrightarrow{W^i(N_k)} = \frac{d^i}{dt} \overrightarrow{V^i(M_k)} + \frac{d^i \overrightarrow{\Omega_k^i}}{dt} \wedge \overrightarrow{M_k N_k} + \overrightarrow{\Omega_k^i} \wedge \frac{d^i \overrightarrow{M_k N_k}}{dt}$$

Nhưng

$$\frac{d^i \overrightarrow{M_k N_k}}{dt} = \frac{d^k \overrightarrow{M_k N_k}}{dt} + \overrightarrow{\Omega_k^i} \wedge \overrightarrow{M_k N_k} = \overrightarrow{\Omega_k^i} \wedge \overrightarrow{M_k N_k}$$

$$\text{Vì là } \frac{d^k \overrightarrow{M_k N_k}}{dt} = \overrightarrow{0}$$

$$\overrightarrow{W^i(N_k)} = \overrightarrow{W^i(M_k)} + \frac{d^i \overrightarrow{\Omega_k^i}}{dt} \wedge \overrightarrow{M_k N_k} + \overrightarrow{\Omega_k^i} \wedge (\overrightarrow{\Omega_k^i} \wedge \overrightarrow{M_k N_k}) \quad (2-3)$$

hay:

$$\overrightarrow{W^i(N_k)} = \overrightarrow{W^i(M_k)} + \frac{d \overrightarrow{\Omega_k^i}}{dt} \wedge \overrightarrow{M_k N_k} + (\overrightarrow{\Omega_k^i} \cdot \overrightarrow{M_k N_k}) \overrightarrow{\Omega_k^i} - (\Omega_k^i)^2 \cdot \overrightarrow{M_k N_k} \quad (2-3^*)$$

Quan hệ (2-3) cho thấy trường gia tốc không phải là một toạ độ.

Ví dụ 2: Xác định vectơ gia tốc của điểm M_2 so với R_0 trong chuyển động của con lắc Ôle trong ví dụ 1.

Giải:

* Phương án đạo hàm:

$$\overrightarrow{W^0(M_2)} = \frac{d^0 \overrightarrow{V^0(M_2)}}{dt} = \frac{d^1 \overrightarrow{V^0(M_2)}}{dt} + \overrightarrow{\Omega_1^0} \wedge \overrightarrow{V^0(M_2)}$$

$$V_i \overrightarrow{\Omega_1^0} = \overrightarrow{0} \quad \text{và} \quad \overrightarrow{V^0(M_2)} = \begin{cases} \dot{X} + l\dot{\theta}\cos\theta \\ l\dot{\theta}\sin\theta \\ 0 \end{cases} \\ R_1$$

Do đó:

$$\overrightarrow{W^0(M_2)} = \begin{cases} \ddot{X} + l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2\sin\theta \\ l\ddot{\theta}\sin\theta + l\dot{\theta}^2\cos\theta \\ 0 \end{cases} \\ R_1$$

* Phương án áp dụng công thức (2-3):

$$\overrightarrow{W^0(M_2)} = \overrightarrow{W^0(O_1)} + \frac{d^0 \overrightarrow{\Omega_2^0}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_1 M_2} + \overrightarrow{\Omega_2^0} \wedge (\overrightarrow{\Omega_2^0} \wedge \overrightarrow{O_1 M_2}) \quad (a)$$

$$-\overrightarrow{W^0(O_1)} = \begin{cases} \ddot{X} \\ 0 \\ 0 \end{cases} \\ R_1$$

$$-\frac{d^0 \overrightarrow{\Omega_2^0}}{dt} = \frac{d^0 \overrightarrow{\Omega_2^0}}{dt} + \overrightarrow{\Omega_1^0} \wedge \overrightarrow{\Omega_2^0} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{cases}, \quad (\overrightarrow{\Omega_1^0} = \overrightarrow{0}) \\ R_1$$

$$\frac{d^0 \overrightarrow{\Omega_2^0}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_1 M_2} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{cases} \wedge \begin{cases} l\sin\theta \\ -l\cos\theta \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} l\ddot{\theta}\cos\theta \\ l\ddot{\theta}\sin\theta \\ 0 \end{cases} \\ R_1 \quad R_1 \quad R_1$$

$$-\overrightarrow{\Omega_2^0} \wedge (\overrightarrow{\Omega_2^0} \wedge \overrightarrow{O_1 M_2}) = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases} \wedge \begin{cases} l\dot{\theta}\cos\theta \\ l\dot{\theta}\sin\theta \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} -l\dot{\theta}^2\sin\theta \\ l\dot{\theta}^2\cos\theta \\ 0 \end{cases} \\ R_1 \quad R \quad R_1$$

Thay các kết quả này vào (a) ta có:

$$\vec{W}'(M_2) = \begin{cases} \ddot{X} + l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2\sin\theta \\ l\dot{\theta}\sin\theta + l\dot{\theta}^2\cos\theta \\ 0 \end{cases}$$

R_1

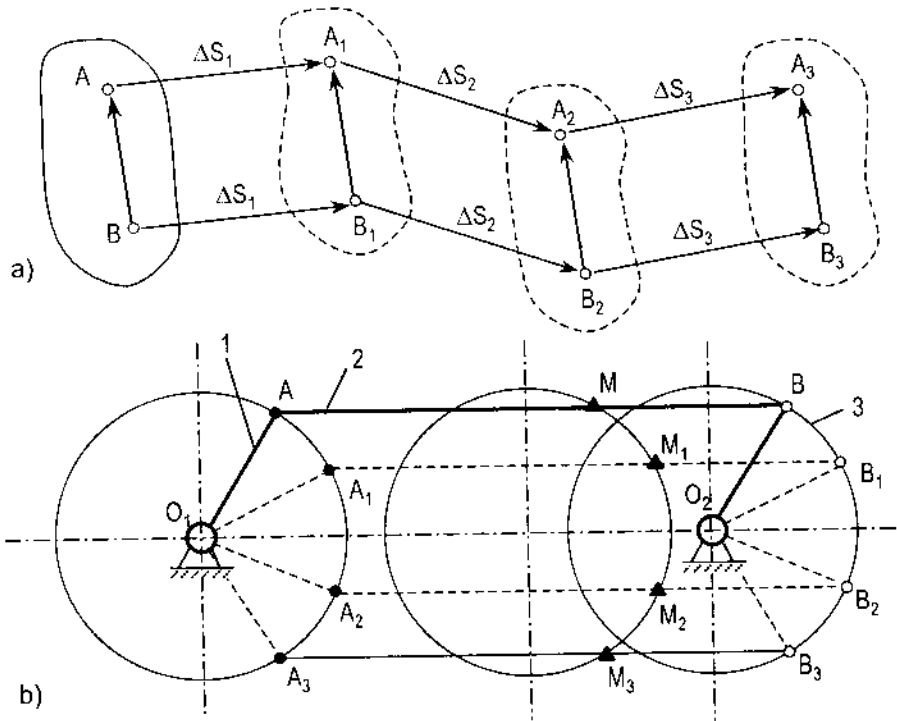
III. CÁC CHUYỂN ĐỘNG CƠ BẢN

1. Chuyển động tịnh tiến của vật rắn

Định nghĩa:

* Vật rắn có chuyển động tịnh tiến nếu một đường thẳng AB bất kỳ trên vật luôn luôn có phương không đổi trong quá trình chuyển động (hình 2-5a).

$$\vec{AB} = \text{hằng}$$



Hình 2-5

Người ta thường lấy tên quỹ đạo của các điểm trên vật chuyển động tịnh tiến để gọi tên chuyển động của vật. Ta gọi là vật chuyển động tịnh tiến thẳng hay tròn, nếu quỹ đạo của các điểm trên vật là những đường thẳng hay tròn.