CHƯƠNG **6**

TÍNH CHẤT CỦA HỆ LỰC TÁC DỤNG LÊN VẬT RẮN TUYỆT ĐỐI

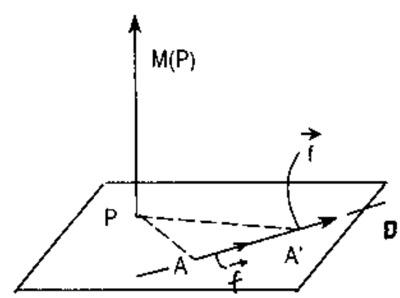
I. LỰC VÀ HỆ LỰC

1. Lực và vectơ mômen của lực đối với một điểm

Đại lượng vectơ cơ bản đặc trưng cho tác dụng tương hỗ về mặt cơ học giữa hai chất điểm hay cơ hệ là lực.

Trong vật rắn tuyệt đối, lực được quan niệm là một đại lượng được truyền đi với tốc độ lớn vô hạn. Trong chương này chúng ta sẽ nghiên cứu những tính chất cơ bản của hệ lực tác dụng lên vật rắn tuyệt đối.

Ta gọi lực $\vec{f}$ là một vectơ trượt có đường tác dụng nằm trên đường thẳng D (hình 6-1). Lực $\vec{f}$ này có thể thay đổi điểm đặt trên giá D của chúng mà không làm thay đổi đặc trưng cơ học của hệ.



Hình 6-1

Vectơ mômen của một lực đối với một điểm là gì?

Gọi P là một điểm trên vật khảo sát. Vectơ mômen của $\vec{f}$ đối với P là một đại lượng vectơ được định nghĩa:

$$\overrightarrow{M(P)} = \vec{f} \wedge \overrightarrow{AP} \text{ (hay } \overrightarrow{PA} \wedge \vec{f}) \qquad (6\text{-}1)$$

Định nghĩa đó không phụ thuộc vị trí của A ở trên giá. Thực vậy, ví dụ lấy một điểm A' khác A (hình 6-1). Theo định nghĩa ta có:

$$\overrightarrow{M(P)}_{A'} = \vec{f} \wedge \overrightarrow{A'P} = \vec{f} \wedge (\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AP})$$
$$= \vec{f} \wedge \overrightarrow{AP} + \vec{f} \wedge \overrightarrow{A'A}$$

Vì rằng: $\vec{f} \wedge \overrightarrow{A'A} = 0$

nên $\overrightarrow{M}(P)_{A'} = \overrightarrow{M}(P)_A$

Xét mối quan hệ giữa hai mômen của $\vec{f}$ đối với hai điểm P, Q bất kì trong không gian.

Theo định nghĩa ta có:

$$\overrightarrow{M}(Q) = \vec{f} \wedge \overrightarrow{AQ}$$

Nhưng $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ}$

Vậy: $\overrightarrow{M}(Q) = \vec{f} \wedge (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ}) = \vec{f} \wedge \overrightarrow{AP} + \vec{f} \wedge \overrightarrow{PQ}$

hay: $\overrightarrow{M}(Q) = \overrightarrow{M}(P) + \vec{f} \wedge \overrightarrow{PQ}$ (6-2)

Vậy trường vectơ $\overrightarrow{M}$ là một trường phản đối xứng. Vectơ của trường là $\vec{f}$. Tập hợp $\vec{f}$ và $\overrightarrow{M}$ tạo thành một toocxơ. Ở đây $\vec{f}$ là một lực nên toocxơ đó được gọi là toocxơ lực.

2. Hệ lực

2.1. Phần tử rút gọn

Cho một tập hợp nhiều lực $\vec{f}_i$ (i = 1, 2, ... n). Gọi phần tử rút gọn của tập hợp đó là hệ hai vectơ sau đây:

$$\begin{cases} \vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i \\ \overrightarrow{M}(Q) = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i \wedge \overrightarrow{A_iQ} \end{cases} \qquad (6\text{-}3)$$

Ta hãy xét mối quan hệ giữa $\vec{R}$ và $\overrightarrow{M}$ của tập hợp đó.

Tính tổng mômen của hệ lực $\vec{f}_i$ đối với P. Theo định nghĩa ta có:

$$\overrightarrow{M}(P) = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i \wedge \overrightarrow{A_iP}$$

Nhưng vì $\overrightarrow{A_iP} = \overrightarrow{A_iQ} + \overrightarrow{QP}$

nên $\overrightarrow{M}(P) = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i \wedge \overrightarrow{A_iQ} + \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i \wedge \overrightarrow{QP}$

Hay $\overrightarrow{M}(P) = \overrightarrow{M}(Q) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{QP}$ (6-4)

Vậy $\vec{R}$ và $\vec{M}$ lập thành một toocxơ mới, nó là tổng của các toocxơ lực $\vec{f_i}$.

Trường hợp riêng quan trọng

Khi tổng $\vec{R} = \vec{0}$ từ (6-4) ta có:

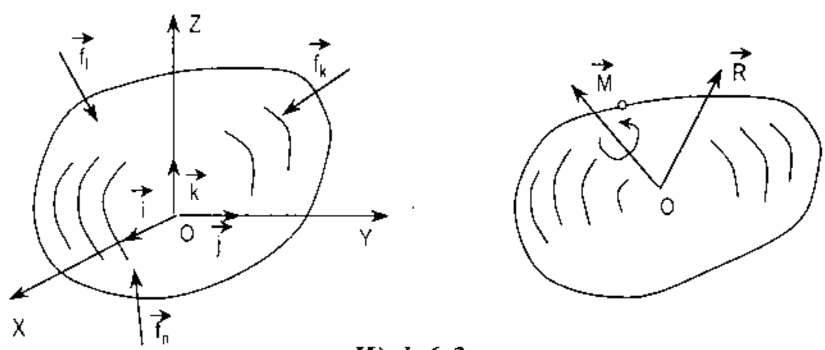
$$\vec{M}(P) = \vec{M}(Q) \tag{6-5}$$

Nghĩa là mômen tại mọi điểm là bằng nhau. Ta gọi trường đó là một trường ngẫu lực đều.

2.2. Hai hệ lực tương đương

Ta có định nghĩa về sự tương đương của hai hệ lực như sau (hình 6-2):

Nếu hai hệ thống vectơ lực khác nhau có các thành phần rút gọn đối với một điểm như nhau thì hai hệ thống vectơ lực đó là tương đương với nhau. Nói một cách khác khi hai hệ thống vectơ lực có cùng một toocxơ đối với một điểm thì chúng tương đương. Như vậy để xác định một toocxơ của một hệ lực chúng ta chỉ cần căn cứ vào các thành phần rút gọn $\vec{R}$ và $\vec{M}$ của nó.



Hình 6-2

Ta xét các trường hợp cụ thể sau đây.

2.a. Khi bất biến vô hướng của toocxơ là bằng không

Sau khi rút gọn về 0 ta có điều kiện:

$$J = \vec{R}.\vec{M}(O) = 0 \tag{6-6}$$

Điều đó chỉ có thể xảy ra trong các trường hợp sau đây:

b) $\vec{R} = \vec{0}$ và $\vec{M}(O) = \vec{0}$

Như vậy ta có một toocxơ không.

Trường hợp này lại là trường hợp hết sức quan trọng.

Vì $\vec{f}$ là các lực nên đây là các điều kiện cân bằng của hệ lực. Muốn một hệ lực được cân bằng thì tooc xơ lực của hệ lực đó phải là một tooc xơ không. Nghĩa là phải có một lúc hai điều kiện sau:

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}(O) = \vec{0} \end{cases} \tag{6-7}$$

Sử dụng một hệ trục tọa độ vuông góc Đề-các Oxyz với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị trên các trục tọa độ thì ta có thể viết:

$$\begin{cases} \vec{R} = s_1\vec{i} + s_2\vec{j} + s_3\vec{k} \\ \vec{M} = M_1\vec{i} + M_2\vec{j} + M_3\vec{k} \end{cases} \tag{6-8}$$

(M đối với bất cứ điểm nào)

Điều kiện R = 0 và M = 0 dẫn đến sáu phương trình hình chiếu với ký hiệu: $\vec{f_i} = f_{ix}\vec{i} + f_{iy}\vec{j} + f_{iz}\vec{k}$; $\vec{OA} = x_i\vec{i} + y_i\vec{j} + z_i\vec{k}$:

$$\left.\begin{array}{ll} s_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} f_{ix} = 0, & M_1 = \sum\limits_{i=1}(y_i f_{iz} - z_i f_{iy}) \\ s_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} f_{iy} = 0, & M_2 = \sum\limits_{i=1}(z_i f_{ix} - x_i f_{iz}) \\ s_3 = \sum\limits_{i=1}^{n} f_{iz} = 0, & M_3 = \sum\limits_{i=1}(x_i f_{iy} - y_i f_{ix}) \end{array}\right\} \tag{6-9}$$

Đó cũng là sáu điều kiện của hệ lực cân bằng.

c) $\vec{R} = \vec{0}$ và $\vec{M}(O) \neq \vec{0}$

Đó là một trường ngẫu lực đều. Mômen ở mọi nơi là bằng nhau.

Nghĩa là một hệ lực đã được thu về thành hai lực song song bằng nhau và ngược chiều nhau.

d) $\vec{R} \neq \vec{0}$ và $\vec{M}(O) = \vec{0}$

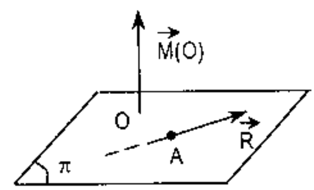
Hệ thống được thu về thành một vectơ lực đi qua O.

e) $\vec{R} \neq \vec{0}$ và $\vec{M}(O) \neq \vec{0}$

Vậy $\vec{R}$ và $\vec{M}(O)$ phải vuông góc với nhau (hình 6-3).

Khi đó ta luôn luôn tìm thấy một điểm A sao cho

$$\overrightarrow{OA} \wedge \vec{R} = \overrightarrow{M}(O)$$



Hình 6-3

Từ biểu thức (T-9) ta có:

$$\overrightarrow{OA} = \frac{\vec{R} \wedge \overrightarrow{M}(O)}{|\vec{R}|^2} + \lambda.\vec{R}$$

Vậy hệ lực thu gọn về thành một vectơ lực $\vec{R}$ tại A.

Hệ lực tương đương với một lực đặt tại A.

2.b. Khi bất biến vô hướng J của toocxơ là khác không

Giả sử khi thu gọn một hệ thống các lực ta được một toocxơ (τ) với các tọa độ tại Q là [R, M(Q)] và ta có điều kiện:

$$J = \vec{R}.\,\overrightarrow{M}(O) \neq 0 \qquad (6\text{-}10)$$

Khi đó ta có thể tách (τ) thành hai toocxơ (τ_1) và (τ_2). Các toocxơ này có các tọa độ tại Q như sau:

$$(\tau_1)\ [0, \overrightarrow{M}(O)] \qquad (6\text{-}11)$$

$$(\tau_2)\ [\vec{R}, 0] \qquad (6\text{-}12)$$

Như vậy (τ_1) là một toocxơ ngẫu lực đều (trường hợp c) và (τ_2) là một lực đi qua Q (glis-xơ) (trường hợp d).

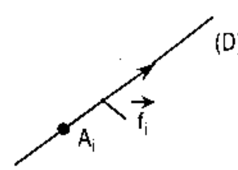
3. Các trường hợp đặc biệt của các hệ lực

3.1. Khi các lực cùng nằm trên một giá (hình 6-4)

Giả sử các lực $\vec{f_i}$ cùng nằm trên giá D.

Hệ tương đương sẽ là một lực duy nhất nằm trên giá D với

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{f_i} \qquad (6\text{-}13)$$



Hình 6-4

Điểm đặt của $\vec{R}$ là một điểm P bất kỳ trên D.

3.2. Hệ các lực có giá đồng quy tại một điểm

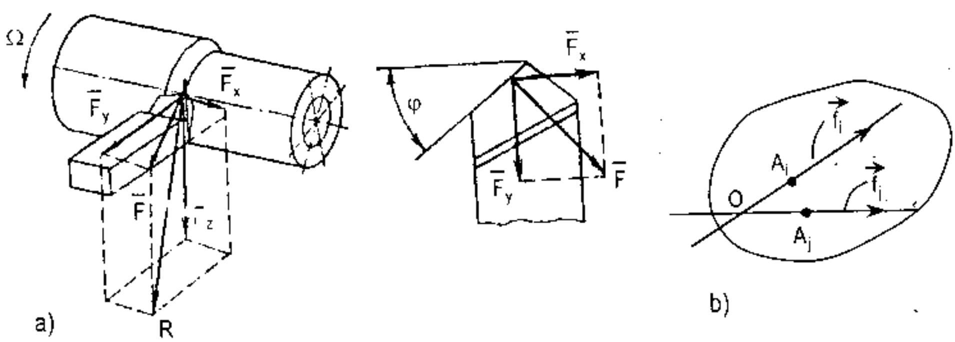
Giả sử O là điểm đồng quy của các giá. Trên hình 6-5 ta vẽ hai giá thứ i và j nào đó của hệ.

Các phần tử rút gọn tại O của hệ là:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{f_i}$$

$$\vec{M}(O) \neq \vec{0} \qquad (6\text{-}14)$$

Như vậy hệ tương đương với một lực duy nhất qua O.



Hình 6-5

3.3. Hệ các lực song song

Gọi $\vec{u}$ là vectơ đơn vị song song với các vectơ lực $\vec{f_i}$ (hình 6-6).

Vectơ chính sẽ là:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{f_i} = \vec{u}.\sum_{i=1} f_i \qquad (6\text{-}15)$$

a) Nếu
$$R = \sum_{i=1}^{n} f_i = 0 \qquad (6\text{-}16)$$

thì ta có hai khả năng:

- Nếu tổng mômen của hệ đối với một điểm nào đó là bằng không:

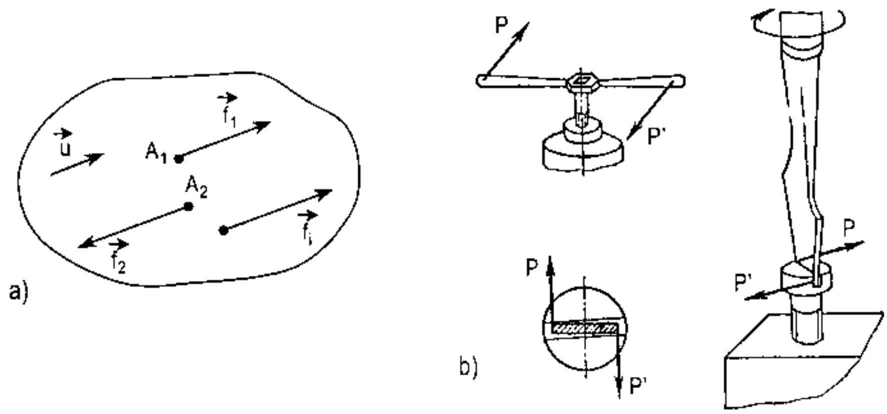
$$\overrightarrow{M(O)} = \sum_{i=1}^{n} \vec{f_i} \wedge \overrightarrow{A_iO} = \vec{0} \qquad (6\text{-}17)$$

Ta suy ra mômen ở mọi nơi là bằng không và ta có một toocxơ không. Nghĩa là các phương trình (6-16) và (6-17) là các điều kiện để hệ lực song song cân bằng.

• Nếu tổng mômen của hệ đối với một điểm nào đó là khác không:

$$\overrightarrow{M}(O) = \sum_{i=1}^{n} \vec{f_i} \wedge \overrightarrow{A_iO} \neq \vec{0} \tag{6-18}$$

Khi đó mômen ở mọi điểm là như nhau, ta có một trường ngẫu lực đều. Nghĩa là hệ lực tương đương một ngẫu lực (hình 6-6b).



Hình 6-6

a) Nếu

$$R = \sum_{i=1}^{n} f_i \neq 0 \tag{6-19}$$

Khi đó trị số mômen tại O sẽ là:

$$\overrightarrow{M}(O) = \sum_{i=1}^{n} \vec{f_i} \wedge \overrightarrow{A_iO} \tag{6-20}$$

Có thể viết (6-20) lại dưới dạng:

$$\overrightarrow{M}(O) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\vec{u} \wedge \overrightarrow{A_iO}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\overrightarrow{OA_i} \wedge \vec{u}) \tag{6-21}$$

Vì $\sum_{i=1}^{n} f_i$ là khác không nên ta luôn luôn tìm thấy một điểm G sao cho:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \tag{6-22}$$

Từ đó ta có:

$$\overrightarrow{M}(O) = \left[\overrightarrow{OG}.\sum_{i=1}^{n} f_i\right] \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{R} \qquad (6\text{-}23)$$

Hệ có thể thu gọn về một lực duy nhất $\overrightarrow{R}$ đi qua G. Ta dễ dàng nhận thấy rằng nếu là các lực song song thì công thức (6-22) cho phép ta xác định được tọa độ của hợp lực của những lực song song đó.

Cũng trong công thức (6-22) ta chú ý rằng f_i là số đo vô hướng của $\overrightarrow{f_i}$ (độ lớn của $\overrightarrow{f_i}$). Như vậy f_i phụ thuộc vào điểm đặt lực A_i vì mỗi điểm tương ứng với một lực. Vậy nếu xem $f_i = m_i$ (m_i là một khối lượng nào đó) thì (6-22) được viết lại như sau (bạn đọc tham khảo chương 5 của sách này):

$$\sum_{i=1}^{n} f_i\overrightarrow{OA_i} - \sum_{i=1}^{n} f_i\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{0}$$

hay

$$\sum_{i=1}^{n} f_i\overrightarrow{GA_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0} \qquad (6\text{-}24)$$

Theo định nghĩa G là khối lượng của hệ khối lượng m_i. Trong trường hợp một vật thể rắn thì (6-24) được viết lại dưới dạng:

$$\int_V \overrightarrow{GA_i}.\rho_i dV = \overrightarrow{0} \qquad (6\text{-}25)$$

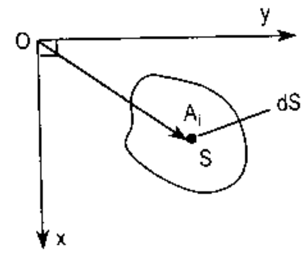
V là thể tích của vật rắn, dV là vi phân thể tích tại A_i và ρ_i là khối lượng riêng tại A_i.

Khi đó (6-22) trở thành công thức để xác định vị trí khối tâm của hệ. Khi hệ nằm trong trọng trường thì G là trọng tâm của hệ. Cũng có thể sử dụng (6-22) để xác định trọng tâm của một hệ phẳng (một diện tích phẳng). Tưởng tượng hệ phẳng hay diện tích đó đặt vuông góc với phương của trọng trường Oz. Các trục Ox, Oy nằm trong mặt phẳng của hệ. Ký hiệu diện tích phẳng là S. Tại A_i ta có vi phân diện tích dS. Xem trọng lượng riêng của S là như nhau ở mọi nơi. Công thức (6-22) sẽ được viết lại dưới dạng (hình 6-7):

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\int_S \overrightarrow{OA_i}.dS}{S} \qquad (6\text{-}26)$$

Chiếu xuống các trục tọa độ ta được các phương trình đại số để xác định tọa độ trọng tâm G của hệ phẳng.

$$\left.\begin{aligned} X_G &= \frac{\int x dS}{S} \\ Y_G &= \frac{\int y dS}{S} \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}27)$$



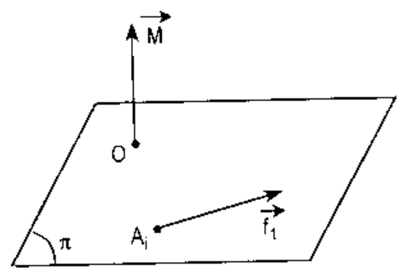
Hình 6-7

trong đó x, y là tọa độ của A_i.

Các tích phân ở tử số (6-27) được gọi là các mômen tĩnh của diện tích đối với các trục Oy và Ox.

3.4. Hệ các lực đồng phẳng

Ta gọi hệ $\vec{f_i}$ là đồng phẳng khi mọi điểm A_i nằm trong mặt phẳng (π) và $\vec{f_i}$ là các vectơ song song với (π) (hình 6-8). Khi đó các vectơ mômen phải vuông góc với π.



Hình 6-8

Nếu $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{f_i}$ là bằng không và $\vec{M}(O)$ là khác không thì hệ tương đương với trường ngẫu lực đều. Hệ được thu về hai vectơ trượt trong π song song và ngược chiều.

Nếu $\vec{R}$ là khác không thì tích vô hướng

$$J = \vec{R}.\vec{M}(O) = 0$$

Hệ có thể đưa về một vectơ trượt duy nhất có điểm đặt P trên đường:

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R} \wedge (\vec{M}(O)}{|\vec{R}|^2} + \lambda\vec{R} \qquad (6\text{-}28)$$

3.5. Điều kiện cần để hệ ba lực tạo thành một toocxơ không

Giả sử có hệ ba vectơ $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ với các điểm đặt $A_1A_2A_3$ (hình 6-9). Ta tìm điều kiện để ba vectơ đó tạo thành một toocxơ không.

Nghĩa là ta phải có hai điều kiện:

a) $\vec{R}$ phải triệt tiêu;

b) M cũng phải triệt tiêu.

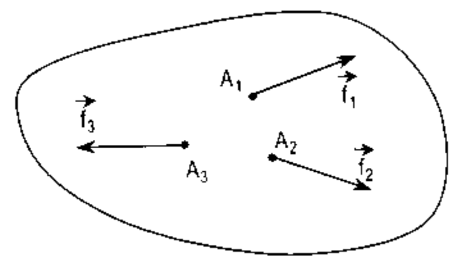
Ta hãy xét điều kiện M phải triệt tiêu.

Chọn ngay điểm A_3 để thu gọn vectơ mômen về đó.

Ta có:

$$\vec{M}(A_3) = \vec{f}_1 \wedge \overrightarrow{A_1A_3} + \vec{f}_2 \wedge \overrightarrow{A_2A_3} = \vec{0} \qquad (6\text{-}29)$$

Vì $\vec{f}_3$ đã đi qua A_3 nên mômen của nó là bằng không. Điều kiện (6-29) nói lên rằng các vectơ mômen do $\vec{f}_1$ và $\vec{f}_2$ gây nên phải thẳng hàng. Mômen $\vec{f}_1 \wedge \overrightarrow{A_1A_3}$ phải vuông góc với mặt phẳng tạo bởi A_3 và $\vec{f}_1$. Mômen $\vec{f}_2 \wedge \overrightarrow{A_2A_3}$ phải vuông góc với mặt phẳng tạo bởi $\vec{f}_2$ và A_3. Nên hai vectơ mômen đó phải thẳng hàng có nghĩa là mặt phẳng $(\vec{f}_1, A_3)$, phải trùng với mặt phẳng $(\vec{f}_2, A_3)$.



Hình 6-9

Các vectơơ $\vec{f}_1$ và $\vec{f}_2$ phải nằm trong mặt phẳng $A_1A_2A_3$.

Với điều kiện thứ hai. Ta phải có:

$$\sum_{i=1}^{3} \vec{f}_i = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 = \vec{0} \qquad (6\text{-}30)$$

Điều kiện này cho ta kết luận rằng $\vec{f}_3$ cũng phải nằm trong mặt phẳng $A_1A_2A_3$. Có thể xảy ra hai khả năng.

* $\vec{f}_1$ và $\vec{f}_2$ có phương giao nhau tại một điểm trong mặt phẳng $A_1A_2A_3$. Vậy $\vec{f}_3$ cũng phải qua điểm đó để cân bằng với tổng của $\vec{f}_1$ và $\vec{f}_2$.

* $\vec{f}_1$ và $\vec{f}_2$ song song với nhau. Như vậy $\vec{f}_3$ cũng phải song song với chúng. Ta có hệ ba lực song song đồng phẳng. $\vec{f}_3$ phải có giá trị bằng tổng của $\vec{f}_1$ và $\vec{f}_2$ và phải có chiều ngược lại.

Kết luận. Để một hệ ba lực tạo thành một toocxơ không là ba lực phải đồng phẳng và phải có: