

• Tập hợp các chất điểm trên mặt cắt vuông góc với trục thanh là hình phẳng rắn tuyệt đối, cụ thể hơn là các bán kính của mặt cắt ngang luôn luôn thẳng, có độ dài không đổi và làm thành những góc không đổi trong quá trình biến dạng.

## 2. Ứng suất và biến dạng

Theo các giả thiết nói trên thì các mặt cắt ngang của thanh (hình 10-2) chỉ có biến dạng trượt. Khi đó bán kính  $\rho$  tại điểm C của mặt cắt bị xoay đi một góc  $d\varphi$ , điểm C trên mặt cắt rời tới vị trí  $C_1$ . Do đó trên mặt cắt ngang (vuông góc với trục z) chỉ có ứng suất tiếp  $\tau_\rho$ , ứng suất này vuông góc với bán kính  $\rho$  tại C.

Gọi  $\gamma_\rho$  và  $\tau_\rho$  là góc trượt (độ trượt tương đối), ứng suất trượt tại điểm C (ứng với bán kính  $\rho$ ),  $d\varphi$  là góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt chỉ cách nhau một đoạn dz. Ta thấy (hình 10-2c):

$$\gamma_\rho \approx \text{tg}\gamma_\rho = \frac{CC_1}{DC} = \frac{\rho d\varphi}{dz} \quad (\text{a})$$

Theo định luật Húc về trượt thì quan hệ  $\tau = f(\gamma)$  là:

$$\tau_\rho = G\gamma_\rho = G \frac{d\varphi}{dz} \rho \quad (\text{b})$$

Khi thu gọn hệ ứng suất  $\{\tau_\rho\}$  về tâm mặt cắt ta được:

$$\int_F \rho \tau_\rho dF = M_z \quad (\text{c})$$

Kế đến (b) thì công thức (c) trở thành:

$$G \frac{d\varphi}{dz} \int_F \rho^2 dF = G \frac{d\varphi}{dz} J_p = M_z \quad (\text{d})$$

Từ (d) ta có góc xoắn tỷ đối  $\theta$  như sau:

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GJ_p} \quad (10-3)$$

$J_p = \int_F \rho^2 dF$  trong (d) và (10-3) được gọi là mômen quán tính độc cực của mặt cắt ngang.

Đây là phương trình vi phân theo chuyển vị góc xoắn  $\varphi(z)$ .

Khi thay (10-3) vào (b) ta được công thức tính ứng suất tiếp tại một điểm C bất kỳ trên mặt cắt ngang:

$$\tau_{\rho} = \frac{M_z}{J_p} \rho \quad (10-4)$$

Công thức (10-4) cho ta thấy ứng suất tiếp phân bố theo quy luật bậc nhất dọc theo bán kính  $\rho$ . Khi  $\rho = R$ , ứng suất có giá trị lớn nhất:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{J_p} \cdot \frac{J_p}{R} = \frac{M_z}{W_p} \quad (10-5)$$

trong đó:

$R$  - bán kính mặt cắt ngang của thanh;

$W_p = J_p/R$  - mômen chống xoắn của mặt cắt ngang của thanh (đơn vị là  $m^3$ ).

### III. CHUYỂN VỊ, NỘI LỰC VÀ PHƯƠNG PHÁP XÁC ĐỊNH CHÚNG

#### 1. Các quan hệ cơ bản giữa chuyển vị, nội lực và tải trọng ngoài

Ta hãy khảo sát điều kiện cân bằng của một đoạn thanh có chiều dài  $dz$  (hình 10-3a,b). Kết quả của việc khảo sát cân bằng và các đạo hàm liên tiếp sau đó cho ta quan hệ (10-6). Bằng cách đạo hàm liên tiếp theo  $z$  hai vế phương trình (10-3) ta nhận được quan hệ (10-7):

$$\Delta M_{iz} = M_{oi}^*$$

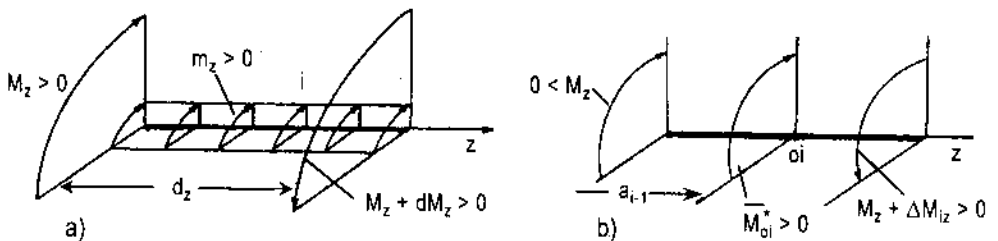
$$\frac{dM_z}{dz} = m_z(z) \quad (10-6)$$

$$\frac{d^n M_z}{dz^n} = m_z^{(n-1)}(z)$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z(z)}{G_i J_{pi}}$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} = \frac{m_z(z)}{G_i J_{pi}} \quad (10-7)$$

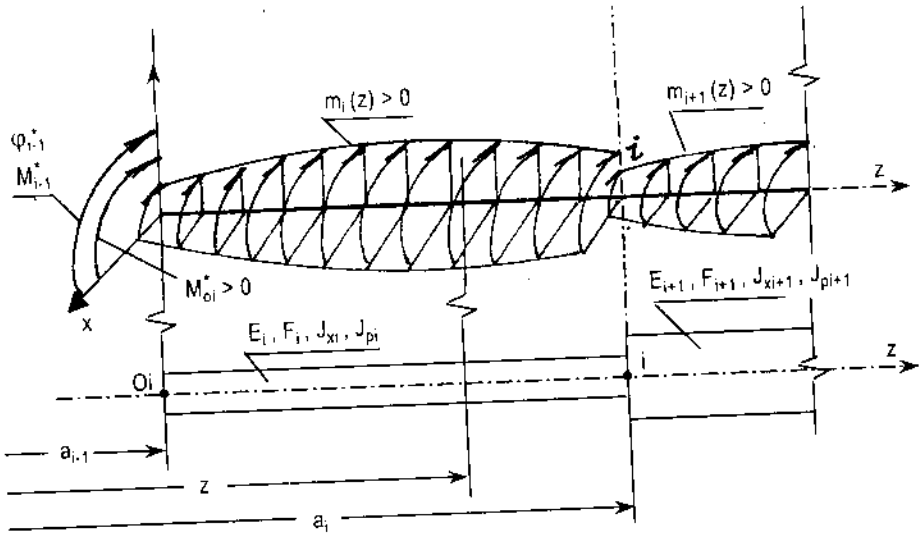
$$\frac{d^n \varphi}{dz^n} = \frac{m_z^{(n-2)}(z)}{G_i J_{pi}}$$



Hình 10-3

## 2. Phương trình vận năng của góc xoắn $\varphi_z(z)$ và mômen nội lực $M_z(z)$

Các quan hệ (10-6) và (10-7) hoàn toàn tương tự toán học như các quan hệ (9-3) và (9-4) trong bài toán kéo (nén). Vì thế thay cho  $E_i F_i$ ,  $U_i$ ,  $N_i$ ,  $P_{oi}$ ,  $q_z(z)$  của bài toán kéo (nén), ta phải lấy tương ứng là  $G_i J_{pi}$ ,  $\varphi_{iz}$ ,  $M_{iz}$ ,  $M_{oi}^*$ ,  $m(z)$ . Tương tự các phép biến đổi đã làm trong bài toán kéo (nén), trong trường hợp này khi quy ước dấu dương của ngoại lực xoắn  $M_z^*$  và  $m_z(z)$  như hình 10-4 và do sự tương tự nói trên từ công thức (9-10) đến (9-14) ta có:



Hình 10-4

### 2.1. Dạng ma trận

$$\{S_n(z)\} = |B_n| |B_{n-1}^*| \dots |B_1^*| \cdot \Delta\{S_{01}\} + \dots + |B_n| \cdot \Delta\{S_{0n}\} \quad (10-8)$$

$$\{S_n^*(a_n)\} = |B_n^*| |B_{n-1}^*| \dots |B_1^*| \cdot \Delta\{S_{01}\} + \dots + |B_n^*| \cdot \Delta\{S_{0n}\} \quad (10-9)$$

Khi  $l_i = \text{const}$  và  $G_i J_{pi} = \text{const}$  với  $\forall i$ , các quan hệ (10-8) và (10-9) có dạng:

$$\left. \begin{aligned} \{S_n(z)\} &= |B_n| |B^*|^{n-1} \cdot \Delta\{S_{01}\} + \dots + |B_n| \cdot \Delta\{S_{0n}\} \\ \{S_n^*(a_n)\} &= |B_n^*| \cdot \Delta\{S_{01}\} + \dots + |B_n^*| \cdot \Delta\{S_{0n}\} \end{aligned} \right\} \quad (10-10)$$

Trong các công thức trên đây  $|B_i|$ ,  $\{S_i(z)\}$ ,  $\Delta\{S_{0n}\}$  lần lượt là:

$$\Delta\{S_{0i}\} = \{\Delta\varphi_{0i}, M_{0i}^*, \Delta m_{0i}(z), \Delta m'_{0i}(z), \Delta m''_{0i}(z), \dots\}^T \quad (10-11)$$

$$|B_i| = \begin{vmatrix} \phi_0 & \frac{\phi_1}{G_i J_{pi}} & \frac{\phi_2}{G_i J_{pi}} & \frac{\phi_3}{G_i J_{pi}} & \dots \\ 0 & \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \dots \end{vmatrix} \quad (10-12)$$

$$\{S_i(z)\} = \{S_i\} = \begin{Bmatrix} \phi_i(z) \\ M_i(z) \end{Bmatrix} \quad (10-13)$$

## 2.2. Dạng biểu diễn tổng

$$a) \varphi_n(z) = \sum_{i=1}^n \left( \Delta \varphi_{0i} \phi_0 + M_{0i}^* \frac{\phi_1}{GJ_p} + \Delta m_{0i} \frac{\phi_2}{GJ_p} + \Delta m'_{0i} \frac{\phi_3}{GJ_p} + \dots \right) \quad (10-14)$$

$$b) M_n(z) = \sum_{i=1}^n (M_{0i}^* \phi_0 + \Delta m_{0i} \phi_1 + \Delta m'_{0i} \phi_2 + \Delta m''_{0i} \phi_3 + \dots)$$

với  $l_i \neq \text{const}$  và  $G_i J_{pi} = \text{const}$ ,  $\forall i$ .

## IV. ĐIỀU KIỆN BÊN - ĐIỀU KIỆN CỨNG

### 1. Điều kiện bên - Ba bài toán thường gặp

Tương tự kết quả (9-17), (9-18), (9-19) đối với bài toán kéo (nén), trong trường hợp bài toán xoắn ta có ba bài toán sau đây:

a) Bài toán kiểm tra điều kiện bên:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} \leq [\tau] \quad (10-15)$$

Trong (10-15),  $[\tau]$  được gọi là ứng suất tiếp cho phép.

b) Bài toán thiết kế

$$W_p \geq \frac{M_z}{[\tau]} \quad (10-16)$$

Cụ thể hơn:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{M_z}{0,2[\tau](1-\eta^4)}} \quad (10-16a)$$

trong đó  $\eta = \frac{d}{D}$ ,  $d$  và  $D$  là đường kính trong và ngoài của mặt cắt,  $\eta = 0$  ứng với thanh có mặt cắt tròn đặc.

c) Bài toán chọn tải trọng cho phép

$$M_z \leq W_p[\tau] \quad (10-17)$$

Mômen xoắn nội lực  $M_z$  trong (10-17) là hàm xác định theo tải trọng ngoài.

## 2. Điều kiện cứng - Ba bài toán thường gặp

Nếu gọi  $[\theta]$  và  $[\varphi]$  là góc xoắn tỷ đối và góc xoắn tuyệt đối cho phép của thanh thì tương tự thanh chịu kéo (nén) ta có ba bài toán sau đây theo điều kiện cứng:

a) Bài toán kiểm tra điều kiện cứng

$$\theta_{\max} \leq [\theta] \quad \text{và} \quad \varphi_{\max} \leq [\varphi] \quad (10-18)$$

b) Bài toán thiết kế

$$J_p \geq \frac{M_z}{G[\theta]} \quad (10-19)$$

Cụ thể hơn: 
$$D \geq \sqrt[4]{\frac{M_z}{0,1[\theta](1-\eta^4)G}} \quad (10-20)$$

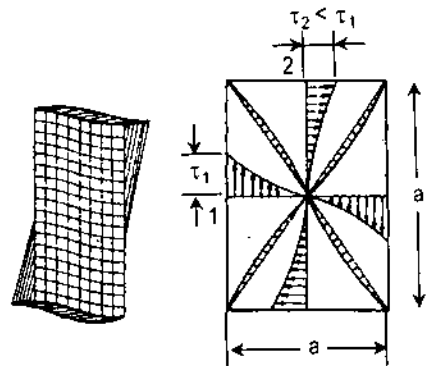
c) Bài toán chọn tải trọng cho phép

$$M_z = f(P) \leq GJ_p[\theta] \quad (10-21)$$

## V. XOẮN THANH MẶT CẮT NGANG KHÔNG TRÒN

### 1. Thanh mặt cắt ngang chữ nhật

Đối với các thanh có mặt cắt ngang không tròn, sau khi bị xoắn các mặt cắt không còn phẳng nữa mà bị vênh đi. Những nghiên cứu sâu hơn của cơ học vật rắn biến dạng cho thấy trên mặt cắt ngang của thanh cũng chỉ có ứng suất tiếp. Đối với thanh mặt cắt ngang chữ nhật, luật phân bố ứng suất tiếp được biểu diễn trên hình 10-5.



Hình 10-5

Ứng suất ở các điểm biên của mặt cắt phân bố không đều dọc theo chiều dài của các cạnh. Điểm giữa của cạnh dài có ứng suất lớn nhất  $\tau_{\max}$ . Cụ thể là:

- Ứng suất tiếp lớn nhất trên cạnh dài:

$$\tau_1 = \tau_{\max} = \frac{M_z}{\alpha ab^2} \quad (10-22)$$

- Ứng suất tiếp lớn nhất trên cạnh ngắn:

$$\tau_2 = \gamma \tau_1 \quad (10-23)$$

- Góc xoắn tương đối:

$$\theta = \frac{M_z}{G \cdot \beta ab^3} \quad (10-24)$$

Các hệ số  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\beta$  phụ thuộc vào tỷ số  $a/b$  và được cho trong bảng 10-1.

**Bảng 10-1**

a/b	1	1,5	1,75	2	2,5	3	4	6	8	10	$\infty$
$\alpha$	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
$\beta$	1,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
$\gamma$	1,000	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742

## 2. Koán thanh thành mỏng

Trong kỹ thuật (nhất là kỹ thuật hàng không, kỹ thuật đóng tàu) người ta thường dùng thanh thành mỏng. Lý thuyết thanh thành mỏng (ví dụ của Vlasov) cung cấp cho ta đầy đủ nhất cách xác định sự ứng xử của các loại thanh này đối với những vật liệu khác nhau.

a) Thanh có thành mỏng kín (hình 10-6a)

Khi bị xoắn, trên mặt cắt ngang của thanh chỉ có ứng suất tiếp phân bố đều theo chiều dày của thành. Ứng suất tại một điểm bất kỳ A của thành được cho bởi:

$$\tau_A = \frac{M_z}{2F^* \cdot b_A} \quad (10-25)$$

trong đó:  $b_A$  - chiều dày của thành tại A;

$F^*$  - diện tích giới hạn bởi đường tâm của thành (còn gọi là đường chu vi trung gian S của thành).

Góc xoắn tỷ đối có công thức:

$$\theta = \frac{M_z}{4GF^{*2}} \oint_S \frac{dS}{b} \quad (10-26)$$

trong đó:

$\oint_S$  - tích phân theo đường cong kín S.

b) Thanh có thành mỏng hở

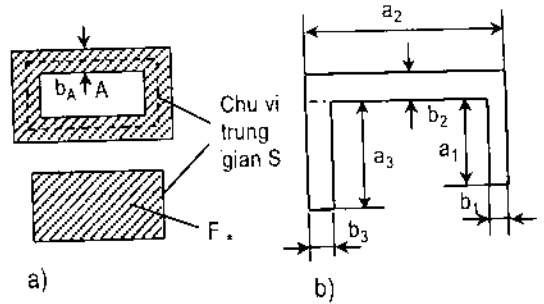
Giả sử mặt cắt ngang của thanh gồm nhiều chữ nhật mảnh ghép lại (hình 10-6b). Ký hiệu  $a_i, b_i$  là bề dài và bề rộng của dải chữ nhật thứ  $i$ . Ứng suất tiếp lớn nhất tại điểm giữa cạnh  $a_i$  được tính theo công thức:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{J^*} b_i \quad (10-27)$$

trong đó:

$$J^* = \frac{1}{3} \eta \sum_{i=1}^m a_i b_i^3 \quad (10-28)$$

$\eta$  - hệ số điều chỉnh được cho trong bảng 10-2.



Hình 10-6

Bảng 10-2

Mặt cắt ngang	$\eta$
L	1,00
I	1,20
T	1,15
C	1,12

Góc xoắn tỷ đối có công thức:

$$\theta = \frac{M_z}{GJ^*} \quad (10-29)$$

Nếu mặt cắt ngang là một dải cong thì khi tính ứng suất và góc xoắn tỷ đối được coi như một dải chữ nhật có chiều dài bằng chu vi.

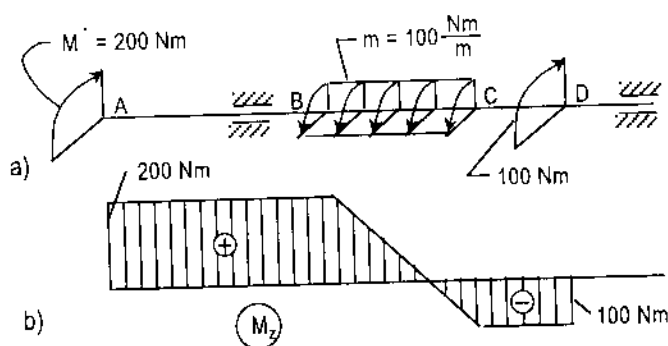
## VI. CÁC VÍ DỤ ÁP DỤNG

### Ví dụ 1:

Cho một trục chịu xoắn như hình 10-7a. Hãy xác định đường kính  $d$  của trục, nếu  $[\tau]$  của vật liệu trục là  $2000 \text{ N/cm}^2$ .

*Giải:*

Từ biểu đồ mômen xoắn nội lực, xác định bằng phương pháp mặt cắt hoặc vụn năng được cho trên hình 10.7b, cho thấy mặt cắt nguy hiểm thuộc đoạn AB có  $M_x = 200 \text{ Nm}$ .



**Hình 10-7**

Theo công thức (10-16) ta có:

$$0,2d^3 \geq \frac{M_x}{[\tau]}$$

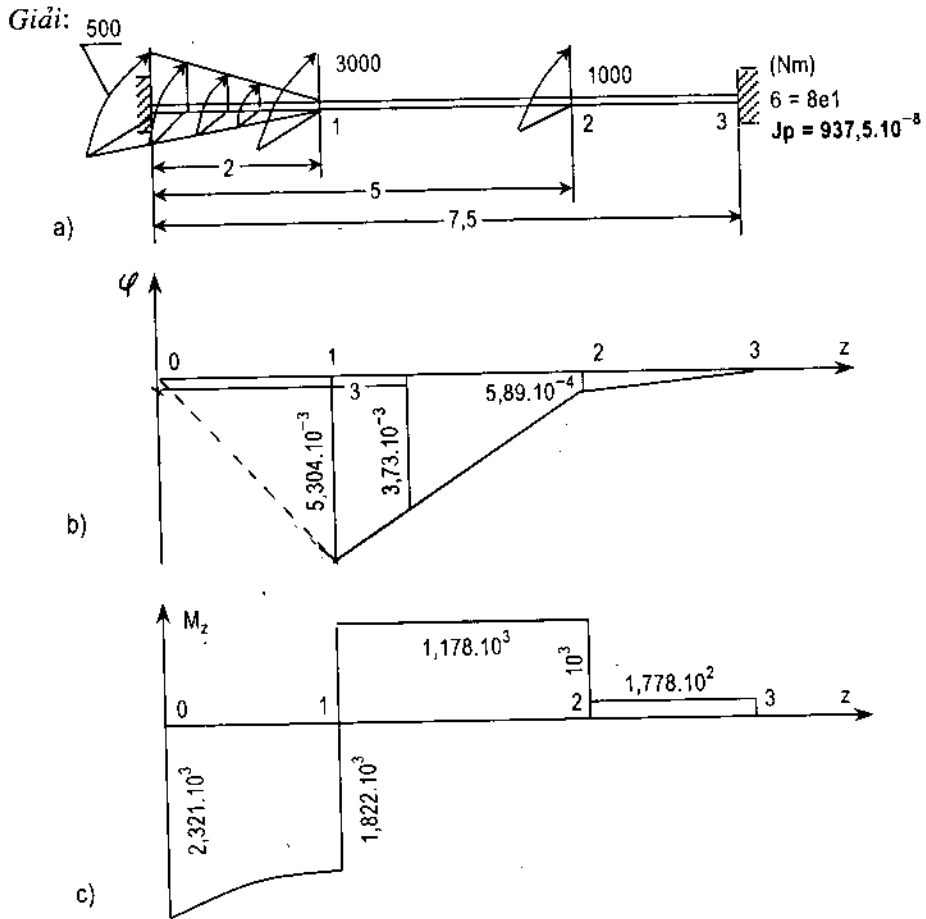
hay:

$$\begin{aligned} d &\geq \sqrt[3]{\frac{M_x}{0,2[\tau]}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{20000}{0,2 \cdot 2000}} = 4,7 \text{ cm} \end{aligned}$$

### Ví dụ 2:

Hãy viết biểu thức giải tích, vẽ các biểu đồ chuyển vị và nội lực đối với thanh được cho trên hình 10-8a. Sau đó kiểm tra xem điều kiện cứng có đảm bảo không? Biết  $[\theta] = 0,10^\circ/\text{m}$ ;  $G = 8 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ ;  $J_p = 937,5 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$ .





Hình 10-8

Biểu thức của chuyển vị  $\varphi(z)$  và mômen xoắn nội lực  $M(z)$ , trong trường hợp này được thiết lập theo (10-8) hoặc (10-14), cụ thể là:

$$GJ_p \varphi(z) = M_{01} \cdot z + 500 \frac{z^2}{2} - 250 \frac{z^3}{3!} \Big|_{i=1} + 3000(z-2) +$$

$$+ 250 \frac{(z-2)^3}{3!} \Big|_{i=2} - 1000(z-5) \Big|_{i=3}$$

$$M(z) = M_{01} + 500z - 250 \frac{z^2}{2} \Big|_{i=1} + 3000 + 250 \frac{(z-2)^2}{2} \Big|_{i=2} - 1000 \Big|_{i=3}$$

trong đó  $M_{01}$  là phản lực xoắn lại ngàm trái  $z = 0$  và được xác định từ điều kiện:  $\varphi(z = 7,5) = 0$ . Giải phương trình này, ta có:

$$M_{01} = -2322,22 \text{ Nm}$$

Thay  $M_{01}$  vào các biểu thức  $\varphi(z)$ ,  $M(z)$  và vẽ các biểu đồ của chúng như trên hình 10-8b, c. Theo định nghĩa:

$$\theta = \frac{M_z}{GJ_p}$$

Do đó: 
$$\theta_{\max} = \frac{M_z}{GJ_p} = \frac{2,321 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{10} \cdot 937,5 \cdot 10^{-8}} = 0,18''/\text{m}$$

$$\theta_{\max} > [\theta \quad ]$$

Vậy điều kiện cứng không đảm bảo.

### Ví dụ 3:

Để xác định công suất tuabin hơi nước, người ta đo góc xoắn của trục trên một đoạn chiều dài 5 m. Đường kính ngoài của trục bằng 25 cm và đường kính trong bằng 17 cm. Vận tốc quay  $n = 25$  v/ph,  $G = 8 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$ .

Xác định công suất của tuabin, biết góc xoắn đo được là  $1''$ . Tính ứng suất lớn nhất trên mặt cắt ngang.

**Giải:**

Từ  $M = 974000 \frac{W}{n}$  rút ra:  $W = \frac{M \cdot n}{974000}$

Từ  $\varphi = \frac{M_z \cdot l}{GI_p}$  rút ra  $M_z = \frac{\varphi GI_p}{l}$

Vậy: 
$$W = \frac{\varphi GI_p \cdot n}{974000 \cdot l}$$

Ta quy đổi góc xoắn đo được ra rad:

$$\varphi = \frac{\pi}{180} \cdot L = 0,01745 \text{ rad}$$

và mômen quán tính cực: