ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA

GIÁO TRÌNH CƠ HỌC LÝ THUYẾT

PHẦN ĐỘNG LỰC HỌC

KHOA SƯ PHẠM KỸ THUẬT

BỘ MÔN CƠ KỸ THUẬT

ĐÀ NẴNG 2005

CHƯƠNG I
CÁC ĐỊNG LUẬT CƠ BẢN CỦA ĐỘNG LỰC HỌC PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG CỦA CHẤT ĐIỂM

§1 BÀI MỞ ĐẦU

Trong phần Tĩnh học chúng ta đã nghiên cứu về lực và sự cân bằng của các vật thể dưới tác dụng của các lực với giả thuyết là các lực không thay đổi theo thời gian.

Trong phần Động học, chúng ta đã nghiên cứu sự chuyển động của các vật thể về mặt hình học không tính đến các nguyên nhân làm thay đổi các chuyển động đó.

Trên thực tế, một số lớn các lực là những đại lượng biến đổi và có thể phụ thuộc vào nhiều tham số. Quy luật chuyển động của vật thể phụ thuộc vào hình dáng, kích thước, khối lượng...của vật và các lực tác dụng lên nó. Động lực học là một phần của cơ học nghiên cứu các quy luật chuyển động của các vật thể dưới tác dụng của các lực.

Lý thuyết động lực học được xây dựng trên những định luật cơ bản động lực học. Chúng là kết quả của hàng loạt các thí nghiệm và quan sát và đã được kiểm nghiệm qua thực tiễn. Những định luật này lần đầu tiên được Newton trình bày một cách có hệ thống năm 1687 vì vậy người ta còn gọi là các định luật Newton hay là những định luật cơ học cổ điển.

§2. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1. Không gian, thời gian :

Như chúng ta đã biết, chuyển động cơ học là sự dời chỗ của các vật thể trong không gian theo thời gian. Không gian và thời gian ở đây hiểu theo nghĩa tuyệt đối cổ điển (Khác với khái niệm không gian, thời gian trong lý thuyết tương đối).

2. Quán tính :

Thực tế cho thấy rằng tác dụng của một lực lên hai vật thể tự do khác nhau, nói chung chúng chuyển động khác nhau.

Tính chất của vật thể thay đổi vận tốc chuyển động nhanh hơn hay chậm hơn khi có cùng lực tác dụng gọi là quán tính. Đại lượng dùng để đo lượng quán tính có thể là khối lượng.

3. Chất điểm :

Để nghiên cứu chuyển động của các vật thể có kích thước nhỏ so với độ dời của chúng, người ta đưa vào khái niệm chất điểm.

Chất điểm là vật thể có khối lượng mà kích thước có thể bỏ qua được trong khi nghiên cứu chuyển động của nó.

4. Cơ hệ :

Cơ hệ là tập hợp các chất điểm mà chuyển động của các chất điểm này liên quan đến chuyển động của các chất điểm khác thuộc hệ.

5. Vật rắn :

Vật rắn là một cơ hệ đặc biệt, trong đó khoảng cách giữa phần tử (chất điểm) bất kỳ của vật luôn luôn không đổi.

6. Hệ quy chiếu :

Để xác định chuyển động của một cơ hệ (hay một chất điểm) nào đó, người ta phải lấy một vật chuẩn làm mốc. Hệ toạ độ gắn với vật chuẩn gọi là hệ quy chiếu. Nếu toạ độ của tất cả các điểm thuộc cơ hệ trong hệ quy chiếu đã chọn, luôn luôn không đổi thì ta nói vật đứng yên trong hệ quy chiếu đó. Trong trường hợp ngược lại, nếu toạ độ của một số chất điểm nào đó thuộc cơ hệ thay đổi theo thời gian thì ta nói cơ hệ chuyển động trong hệ quy chiếu đã chọn.

§3. CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN

1. Định luật quán tính (Định luật I) :

Chất điểm không chịu tác dụng của lực nào thì giữ nguyên trạng thái đứng yên hay chuyển động thẳng đều.

Trạng thái đứng yên hay chuyển động thẳng đều của chất điểm được gọi là chuyển động theo quán tính.

Theo định luật này nếu không có lực nào tác dụng lên chất điểm hoặc hợp các lực tác dụng lên chất điểm bằng 0 thì véctơ vận tốc $\vec{v}$ của chất điểm sẽ không đổi cả về độ lớn lẫn hướng và do đó gia tốc $\vec{w} = 0$.

Hệ quy chiếu trong đó thoả mãn định luật quán tính gọi là hệ quy chiếu quán tính.

2. Định luật cơ bản của động lực học (Định luật II) :

Dưới tác dụng của lực, chất điểm tự do chuyển động với gia tốc cùng hướng với hướng của lực và có độ lớn tỷ lệ với độ lớn của lực :

$$\vec{F} = m.\vec{W} \qquad (1.1)$$

Trong đó m là khối lượng của chất điểm.

Hệ thức (1.1) được gọi là phương trình cơ bản của động lực học.

Từ hệ thức (1.1) chúng ta thấy rằng dưới tác dụng của cùng một lực, chất điểm nào có khối lượng nhỏ hơn sẽ có gia tốc lớn hơn. Như vậy khối lượng là đại lượng vật lý đặc trưng cho mức độ cản trở sự thay đổi vân tốc của chất điểm-quán tính của chất điểm.

Trong cơ học cổ điển khi vận tốc chuyển động của chất điểm nhỏ hơn nhiều so với vận tốc ánh sáng, người ta coi khối lượng là đại lượng không đổi.

Nhờ hệ thức (1.1) ta có thể tìm được hệ thức liên hệ giữa trọng lượng và khối lượng của một vật. Thật vậy, thực nghiệm đã chỉ rằng dưới tác dụng của trọng lực P một vật rơi tự do (ở độ cao không lớn lắm và không tính đến sức cản của không khí) đều có cùng gia tốc là g.

Do đó từ (1.1) ta suy ra :

$$P = m.g \qquad (1.2)$$

Cần nói thêm rằng, cũng như gia tốc g, trọng lượng thay đổi theo vĩ độ và độ cao nhưng khối lượng là một đại lượng không đổi với một vật.

3. Định luật về tác dụng và phản tác dụng : (Định luật III)

Hai lực mà hai chất điểm tác dụng lên nhau bằng nhau về số, cùng hướng tác dụng nhưng ngược chiều.

Ta cần chú ý rằng các lực tác dụng tương hỗ này không tạo thành một hệ lực cân bằng vì chúng đặt vào hai chất điểm khác nhau.

4. Định luật độc lập tác dụng :

Dưới tác dụng đồng thời của một số lực, chất điểm có gia tốc bằng tổng hình học các gia tốc mà chất điểm có được khi từng lực tác dụng riêng biệt.

Giả sử chất điểm có khối lượng m chịu tác dụng của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$. Gọi là gia tốc của chất điểm có được khi các lực này tác dụng đồng thời, còn $\vec{W}_1, \vec{W}_2, ..., \vec{W}_n$ mà chất điểm có được nếu như từng lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ tác dụng riêng lẽ.

Theo tiên đề trên ta có :

$$\vec{W} = \vec{W}_1 + \vec{W}_2 + ... + \vec{W}_n \qquad (1.3)$$

Nhân hai vế của (1.3) với m và để ý đến tiên đề thứ 2 ta được :

$$m.\vec{W} = m.\vec{W}_1 + m.\vec{W}_2 + ... + m.\vec{W}_n$$

$$m.\vec{W} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n$$

Hay là :

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m.\vec{W} \qquad (1.4)$$

5. Hệ đơn vị :

Để đo các đại lượng cơ học người ta phải dùng ba đơn vị cơ bản. Tuỳ thuộc vào việc chọn hệ đơn vị cơ bản mà ta có hệ đơn cị do khác nhau :

- Hệ đơn vị quốc tế (SI) : Các đơn vị cơ bản mét (m), kilôgram (kg) và giây (s). Lực là đơn vị dẫn xuất được đo bằng Newton (N).

$$1N = 1\frac{kg.m}{s^2}$$

Hệ đơn vị MKS : Các đơn vị cơ bản là mét (m), kilôgram lực (kG) và giây (s). Đơn vị đo khối lượng là đơn vị dẫn xuất.

§4. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG

Dựa vào định luật cơ bản của động lực học, ở đây chúng ta sẽ thiết lập mối quan hệ giữa các lực tác dụng lên vật thể và quy luật chuyển động của nó. Mối quan hệ đó được gọi là phương trình vi phân chuyển động.

I. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG CỦA CHẤT ĐIỂM :

Xét chuyển động của chất điểm tự do dưới tác dụng của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ (Đối với các chất điểm không tự do, chúng ta dùng nguyên lý giải phóng liên kết bằng các phản lực để có thể xem chúng như chất điểm tự do).

1. Dạng véctơ :

Như chúng ta đã biết, gia tốc $\vec{W}$ của chất điểm được biểu thị qua véctơ bán kính $\vec{r}$ của nó như sau :

$$\vec{W} = \ddot{\vec{r}}$$

Vì vậy phương trình cơ bản của động lực học chất điểm (1.4) có dạng :

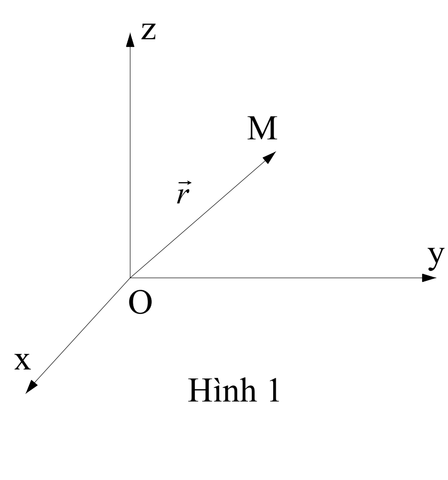
$$m.\ddot{\vec{r}} = \sum \vec{F}_k \qquad (1.5)$$

Phương trình (1.5) là phương trình vi phân chuyển động của chất điểm dưới dạng véctơ.

2. Dạng toạ độ Descarte :

Xét chuyển động của chất điểm trong hệ toạ độ Descarte Oy. Chiếu phương trình (1.5) lên các trục toạ độ Ox, Oy, Oz ta được :

$$\begin{cases} m.\ddot{x} = \sum F_{kx} \\ m.\ddot{y} = \sum F_{ky} \\ m.\ddot{z} = \sum F_{kz} \end{cases} \qquad (1.6)$$



Hình 1

hay :

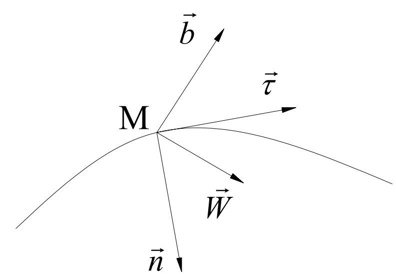
$$\begin{cases} m.\dfrac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx} \\ m.\dfrac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{ky} \\ m.\dfrac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{kz} \end{cases} \qquad (1.6')$$

Hệ phương trình (1.6) hay (1.6') là phương trình vi phân chuyển động của chất điểm trong hệ toạ độ Descarte.

3. Hệ toạ độ tự nhiên :

Chiếu hai vế của phương trình (1.4) lên các trục của hệ toạ độ tự nhiên (τ, n, b) (Hình 2) ta được :

$$\begin{cases} m.W_\tau = \sum F_{k\tau} \\ m.W_n = \sum F_{kn} \\ m.W_b = \sum F_{kb} \end{cases}$$



Hình 2

Vì $W_\tau = \ddot{s}$, $W_n = \dfrac{\dot{s}^2}{\rho}$, $W_b = 0$ nên

$$\begin{cases} m.\ddot{s} = \sum F_{k\tau} \\ m.\dfrac{\dot{s}^2}{\rho} = \sum F_{kn} \\ 0 = \sum F_{kb} \end{cases} \qquad (1.7)$$

Những phương trình này được áp dụng một cách có hiệu quả khi biết quỹ đạo tuyệt đối của chất điểm. Phương trình thứ nhất của hệ (1.7) với điều kiện ban đầu tương ứng cho phép chúng ta xác định quy luật chuyển động của hệ, hai phương trình còn lại dùng để xác định các yếu tố khác chưa biết của bài toán (phản lực liên kết, bán kính cong ,...v..v)

II. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG CỦA HỆ :

Xét cơ hệ gồm n chất điểm $m_1, m_2, ..., m_n$. Gọi $\vec{F}^e{}_k$ là hợp lực của tất cả các lực ngoài và $\vec{F}^i{}_k$ là các hợp lực của tất cả các lực tổng tác dụng lên chất điểm thứ k của hệ. Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm thứ k sẽ có dạng :

$$m_k\vec{W}_k = \vec{F}^e{}_k + \vec{F}^i{}_k$$

Viết phương trình tương tự cho tất cả các chất điểm của hệ ta được :

$$m_1\vec{W}_1 = \vec{F}^e{}_1 + \vec{F}^i{}_1$$

$$m_2\vec{W}_2 = \vec{F}^e{}_2 + \vec{F}^i{}_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$m_n\vec{W}_n = \vec{F}^e{}_n + \vec{F}^i{}_n$$

Hay :

$$m_1.\ddot{x} = F^e{}_{1x} + F^i{}_{1x}$$

$$m_1.\ddot{y} = F^e{}_{1y} + F^i{}_{1y}$$

$$m_1.\ddot{z} = F^e{}_{1z} + F^i{}_{1z}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1.8)$$

$$m_n.\ddot{x} = F^e{}_{nx} + F^i{}_{nx}$$

$$m_n.\ddot{y} = F^e{}_{ny} + F^i{}_{ny}$$

$$m_n.\ddot{z} = F^e{}_{nz} + F^i{}_{nz}$$

(1.8) là hệ gồm 3.n phương trình.

Trong trường hợp nếu chúng ta phân loại lực ra thành lực hoạt động $\vec{F}^a{}_k$ và phản lực liên kết $\vec{N}_k$ thì tương tự với hệ (1.8) ta có :

$$m_1\vec{W}_1 = \vec{F}^a{}_1 + \vec{N}_1$$

$$m_2\vec{W}_2 = \vec{F}^a{}_2 + \vec{N}_2 \qquad (1.9)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$m_n\vec{W}_n = \vec{F}^a{}_n + \vec{N}_n$$

§5. HAI BÀI TOÁN CƠ BẢN CỦA ĐỘNG LỰC HỌC

Trong động lực học cần giải quyết hai bài toán cơ bản sau đây:

1. Xác định lực tác dụng lên chất điểm khi đã biết quy luật chuyển động của nó. (Bài toán thứ nhất của động lực học).

2. Xác định quy luật chuyển động của điểm khi biết các lực tác dụng lên nó (Bài toán thứ hai của động lực học).

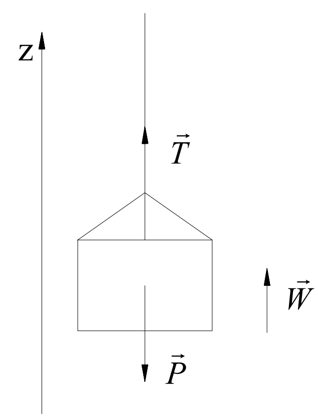
Để giải quyết bài toán này ta có thể sử dụng các phương trình (1.5), (1.6), (1.7) - đối với chất điểm và các hệ phương trình (1.8) hay (1.9)-đối với hệ cơ.

Tuy nhiên, cho đến nay chưa có phương pháp tổng quát để tích phân các hệ dạng (1.8) vì vậy trong thực tế người ta thường dùng những phương pháp khác hiệu quả hơn mà chúng ta sẽ xét trong những phần sau.

I. GIẢI BÀI TOÁN THỨ NHẤT CỦA ĐỘNG LỰC HỌC ĐỐI VỚI CHẤT ĐIỂM:

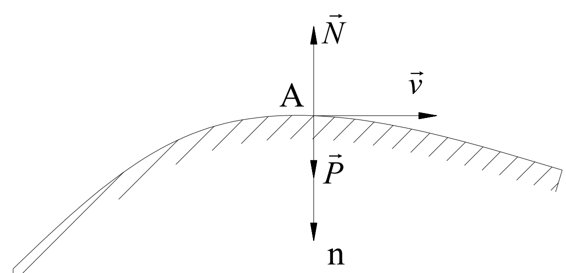
Khi biết quy luật chuyển động của chất điểm, chúng ta dùng các công thức đã biết trong phần động học để tính gia tốc của chất điểm và cuối cùng dùng phương trình cơ bản (1.5), (1.6), hay (1.7) để xác định các lực tác dụng lên nó.

Ví dụ 1.1 : Một thang máy có trọng lượng P (hình 3) bắt đầu đi lên với gia tốc W. Hãy xác định sức căng của dây cáp.



Hình 3

Ví dụ 1.2 : Tìm áp lực của ô-tô lên mặt cầu tại điểm A. Cho biết ô-tô có trọng lượng P, vận tốc chuyển động là $\vec{v}$ và bán kính cong của cầu tại A là ρ (hình 4).



Hình 4

II. GIẢI BÀI TOÁN THỨ HAI CỦA ĐỘNH LỰC HỌC ĐỐI VỚI CHẤT ĐIỂM :

Với bài toán nà, chúng ta đã biết lực tác dụng lên chất điểm như hàm của thời gian, vận tốc, vị trí... nghĩa là :

$$\vec{F}_k = \vec{F}_k(t, \vec{v}, \vec{r})$$

Khi đó phương trình vi phân chuyển động của chất điểm có dạng :

$$\begin{cases} m.\ddot{x} = \sum F_{kx}(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m.\ddot{y} = \sum F_{ky}(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m.\ddot{z} = \sum F_{kz}(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \end{cases} \qquad (1.10)$$

Đây là hệ ba phương trình vi phân cấp 2. Nghiệm tổng quát của nó phụ thuộc vào 6 hằng số tuỳ ý :

$$\begin{cases} x = f_1(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \\ y = f_2(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \\ z = f_3(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \end{cases} \qquad (1.11)$$

Những hằng số tích phân này sẽ được xác định nhờ những điều kiện ban đầu của chuyển động, chẳng hạn :

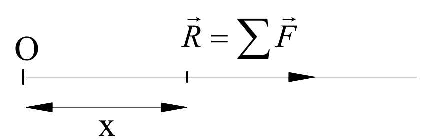
Khi t = 0 thì $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$.

$$\dot{x} = \dot{x}_0, \dot{y} = \dot{y}_0, \dot{z} = \dot{z}_0 \qquad (1.12)$$

Việc giải hệ phương trình (1.10) không phải lúc nào cũng thực hiên được trong dạng giải tích. Chúng ta chỉ có thể tích phân hệ (1.10) với các điều kiện ban đầu (1.12) trong số trường hợp đơn giản.

1. Chuyển động thẳng của điểm :

Trong phần động học, chúng ta đã biết vận tốc và gia tốc của điểm trong chuyển động thẳng luôn luôn hướng theo đường quỹ đạo. Vì gia tốc có chiều trùng với chiều của hợp lực tác dụng lên chất điểm do đó chuyển động thẳng chỉ xảy ra khi : $\vec{R} = \sum \vec{F}_k$ có hướng không đổi và có vận tốc ban đầu bằng không hoặc cùng hướng với $\vec{R}$.



Hình 5

Vị trí của điểm M xác định bởi toạ độ x, phương trình chuyển động của chất điểm trong trường hợp này sẽ là :

$$m\dot{x} = R_x(t, x, \dot{x})$$

Hay : $$m\frac{d^2x}{dt^2} = R_x(t, x, \frac{dx}{dt}) \qquad (1.13)$$

Với điều kiện ban đầu .

Khi $t = 0, \quad x = x_0$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \qquad (1.14)$$

Ngay cả trong trường hợp đơn giản này, phương trình (1.13) không phải lúc nào cũng giải được bằng phương pháp giải tích. Chúng ta xét một số trường hợp mà phương trình (1.13) có thể phân tích được ở dạng hữu hạn :

a) Lực chỉ phụ thuộc vào thời gian $R_x = f_x(t)$ khi đó :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f(t)$$

$$m\frac{dv}{dt} = f(t)$$

$$w = \frac{1}{m}\int f(t).dt + c_1 = f_1(t, c_1)$$

Từ đây ra suy ra : $x = f_2(t,c_1,c_2)$

Các hằng số phân tích c_1, c_2 được xác định từ điều kiện ban đầu (1.14)

b) Lực chỉ phụ thuộc vào khoảng cách : $R_x = f(x)$. Khi đó phương trình chuyển động có dạng :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f(t)$$

Ta có : $$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}.\frac{dx}{dt}$$

nên : $$mv\frac{dv}{dx} = f(x)$$

Đây là phương trình tách biến có thể phân tích được :

$$v = f_1(x,c_1)$$

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x,c_1)$$

$$\frac{dx}{f_1(x,c_1)} = dt$$

Tích phân phương trình tách biến này ta được :

$$t = g(x,c_1,c_2)$$

hay :

$$x = f_2(x,c_1,c_2)$$

c) Lực chỉ phụ thộc vào vận tốc: $R_x = f(\dot{x})$. Phương trình chuyển động viết dưới dạng :

$$m\frac{d\dot{x}}{dt} = f(\dot{x}) \qquad (1.17)$$

Tích phân phương trình tách biến này ta được :

$$t = g_1(\dot{x},c_1)$$

Hay :

$$\dot{x} = f_1(x,c_1)$$

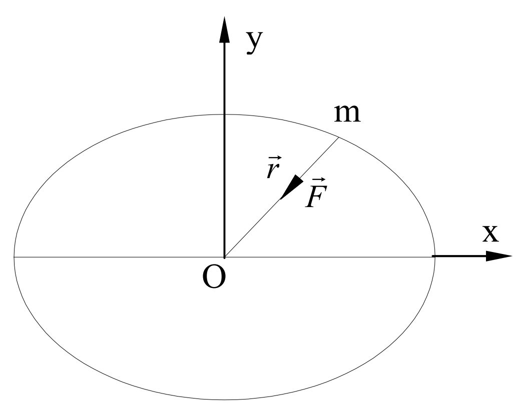
$$\frac{dx}{dt} = f_1(t,c_1)$$

Tiếp tục tích phân phương trình này ta được :

$$x = f_2(t,c_1,c_2)$$

2. Một số ví dụ :

Ví dụ 1.3 : Một chất điểm có khối lượng m, chuyển động trong mặt phẳng dưới tác dụng của lực hút $\vec{F}$ hướng tâm vào tâm O cố định theo luật $\vec{F} = -k^2 m.\vec{r}$. Trong đó $\vec{r}$ là véctơ định vị của chất điểm và k là hệ số tỷ lệ. Hãy xác định phương trình chuyển động và quỹ đạo của chất điểm ấy. Biết rằng tại thời điểm ban đầu x = l, y = 0, $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$.



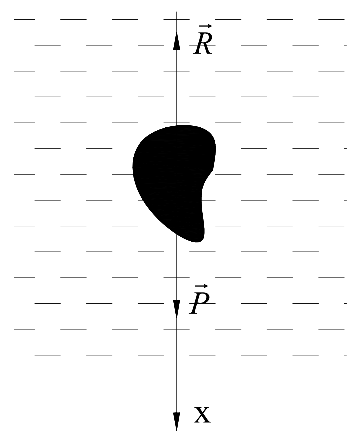
Hình 6

Ví dụ 1.4: Vật có trọng lượng P bắt đầu chuyển động từ trạng thái đứng yên trên mặt phẳng nằm ngang nhau dưới tác dụng của lực $\vec{R}$ có hướng không đổi và có trị số tăng tỷ lệ với thời gian theo quy luật R=kt. Tìm quy luật chuyển động của vật.

Ví dụ 1.5 : Giải bài toán vật rơi trong không khí từ độ cao không lớn lắm và sức cản tỷ lệ với bình phương của vận tốc :

$$R = \frac{1}{2} c_x \rho S v^2$$

trong đó ρ là mật độ môi trường, S là diện tích hình chiếu của vật trên mặt phẳng vuông góc với phương chuyển động, biết rằng khi t = 0, x = v_x = 0.



Hình 7

CHƯƠNG II

CÁC ĐỊNH LÝ TỔNG QUÁT CỦA ĐỘNG LỰC HỌC

Các định lý tổng quát của động lực học là hệ quả của định luật cơ bản của động lực học, chúng ta thiết lập mối liên hệ giữa các đại lượng cơ bản của chuyển động là động lượng, động năng và độ đo cơ bản tác dụng của lực là xung lượng và công.

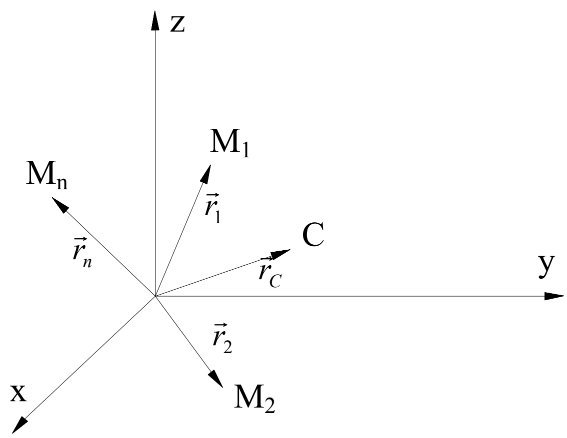
Trong nhiều trường hợp, nhất là trong động lực học việc tích phân hệ phương trình chuyển động (1.8) là việc làm hết sức phức tạp, hơn nữa trong phần lớn các bài toán động lực học của hệ, vấn đề chính không phải là khảo sát một cách chi tiết toàn bộ chuyển động của chất điểm thuộc hệ mà chỉ nghiên cứu các hiện tượng theo từng mặt riêng biệt có tầm quan trọng trong thực tiễn. Để giải quyết những bài toán như vậy sử dụng các định lý tổng quát sẽ làm cho quá trình giải đơn giản và nhanh chóng hơn.

§1. CÁC ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC KHỐI LƯỢNG CỦA HỆ VÀ VẬT RẮN

1.1 Khối lượng của hệ - Khối tâm :

Như chúng ta đã biết, chuyển động của một cơ hệ ngoài việc phụ thuộc vào lực tác dụng còn phụ thuộc vào tổng khối lượng và phân bố các khối lượng của hệ đó. Khối lượng của hệ bằng tổng lượng của tất cả các phần tử hợp thành hệ đó :

$$M = \sum m_k$$



Hình 8

Khối tâm của một cơ hệ gồm n chất điểm ($M_1, M_2, ..., M_n$) khối lượng tương ứng là ($m_1, m_2, ..., m_n$) và có vị trí được xác định bởi các véctơ bán kính $\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n$ là một điểm hình học C được xác định bởi công thức :

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{M} \qquad (2.1)$$

Chiếu lên các trục toạ đô ta được :

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{\sum m_k x_k}{M} \\ y_C = \dfrac{\sum m_k y_k}{M} \\ z_C = \dfrac{\sum m_k z_k}{M} \end{cases} \qquad (2.2)$$

Từ các công thức trên chúng ta thấy rằng nếu cơ hệ nằm trong trọng trường đồng nhất thì khối tâm của cơ hệ sẽ trùng với trọng tâm của nó. Cũng cần nói thêm rằng, khối tâm được xác định theo công thức (2.1) hoăc (2.2) luôn luôn tồn tại như một thuộc tính của cơ hệ, còn trọng tâm của vật chỉ có nghĩa khi cơ hệ nằm trong trường trọng lực, khái niệm trọng tâm sẽ mất khi không còn trọng lượng. Đó là điều khác nhau cần phân biệt đối với hai khái niệm này.

1.2 Mômen quán tính :

Vị trí của khối tấm chưa đặc trưng hoàn toàn cho sự phân bố khối lượng của cơ hệ. Vì vậy trong cơ học cốnc một đặc trưng cho sự phân bố khối lượng mômen quán tính.

- Mômen quán tính của một vật thể (một cơ hệ) đối với trục Oz là đại lượng vô hướng bằng tổng các tích của khối lượng của điểm với bình phương khoảng cách từ các điểm tới trục.

$$J_z = \sum m_k d^2{}_k \qquad (2.3)$$

Nếu toạ độ của các điểm trong một hệ trục toạ độ Oxyz nào đó là x_k, y_k, z_k thì mômen quán tính của hệ đối với các trục toạ độ sẽ là :

$$\begin{cases} Jx = \sum m_k (y^2{}_k + z^2{}_k) \\ Jy = \sum m_k (x^2{}_k + z^2{}_k) \\ Jz = \sum m_k (y^2{}_k + x^2{}_k) \end{cases} \qquad (2.4)$$

Trong kỹ thuật mômen quán tính của vật thể đối với trục thường được biểu thị dưới dạng tích của khối lượng với bình phương của một khoảng cách trung bình nào đó.

$$J_z = M\rho^2{}_z \qquad (2.5)$$

Đại lượng $\rho_z = \sqrt{\frac{J_z}{M}}$ gọi là bán kính quán tính của một vật đối với trục z.

II. Mômen quán tính của vật thể (cơ hệ) :

Đối với một điểm O nào đó là đại lượng vô hướng bằng tổng các tích các khối lượng với bình phương khoảng cách từ các chất điểm tới tâm đó.

$$J_O = \sum m_k . r^2{}_k \qquad (2.6)$$

Nếu O là gốc toạ độ thì tương ứng với (2.4) ta có :

$$J_O = \sum m_k (x^2{}_k + y^2{}_k + z^2{}_k) \qquad (2.7)$$

và ta có mối liên hệ : $2J_0 = J_x + J_y + J_z$.

III. Mômen quán tính của vật thể đối với các trục song song. Định lý Huygen :

Định lý 1.1 : Mômen quán tính của vật đối với một trục z_1 nào đó bằng mômen quán tính đối với trục x đi qua khối tâm và song song với z_1 cộng với tích khối lượng của vật với bình phương khoảng cách giữa hai trục.

$$J_{z1} = J_{Zc} + Md^2$$

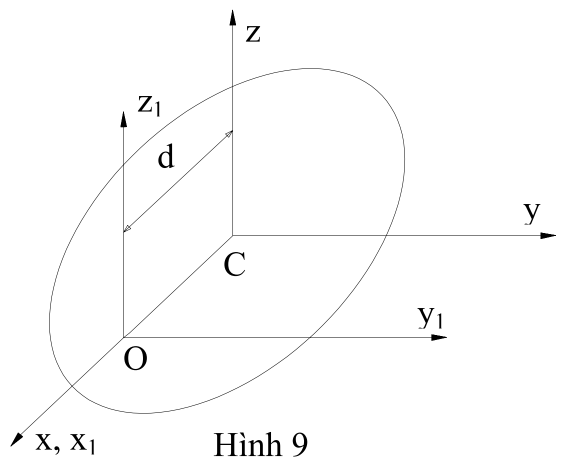
Chứng minh :

Qua C dựng hệ trục toạ độ Cxyz sao cho trục x cắt z_1 tại O. Qua O dựng hệ trục toạ độ $Ox_1y_1z_1$ sao cho $x_1 \equiv x$.

Theo công thức thứ ba của (2.4) ta có :

$$J_{z1} = \sum m_k (x^2{}_{1k} + y^2{}_{1k})$$

$$J_z = \sum m_k (x^2{}_k + y^2{}_k)$$



Hình 9

ta có :

$$x_{1k} = x_k - d, \; y_{1k} = y_1$$

nên : $$J_{z1} = \sum m_k (x^2{}_k + y^2{}_k) + \left(\sum m_k\right) d^2 - 2.d\left(\sum m_k x_k\right)$$

nhưng : $J_{zc} = \sum m_k (x^2{}_k + y^2{}_k)$, $2.d\left(\sum m_k x_k\right) = 2dM_C = 0$ (vì C chính là gốc toạ độ)

nên : $$J_{z1} = J_{Zc} + Md^2$$

Từ định lý này ta suy ra rằng đối với các trục trùng phương, mômen quán tính đối với trục qua khối tâm là nhỏ nhất.

IV. ĐỊNH LÝVỀ MÔMEN QUÁN TÍNH ĐỐI VỚI TRỤC QUA GỐC TOẠ ĐỘ :

Cho hệ trục toạ độ Oxyz và trục L đi qua O. Phương của L được xác định bởi ba góc chỉ phương α, β, γ (Hình 10).

Gọi khoảng cách từ điểm M_k bất kỳ thuộc vật đến trục L là $d_k = M_kH_k$. Theo định nghĩa :

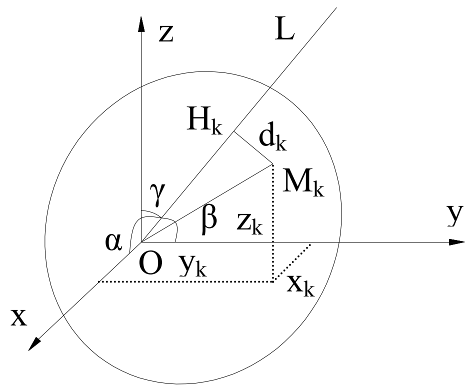
$$J_L = \sum m_k d^2{}_k$$

Từ tam giác vuông H_kOM_k ta có :

$$d^2 = M_kH^2{}_k = OM^2{}_k - OH^2{}_k \quad (*)$$

Trong đó :

$$OM^2{}_k = x^2{}_k + y^2{}_k + z^2{}_k$$



Hình 10

OH_k là hình chiếu của $\overrightarrow{OM}_k$ lên trục L. Chiếu hai vế đẳng thức véctơ : $\overrightarrow{OM}_k = x_k.\vec{i} + y_k.\vec{j} + z_k\vec{k}$ lên trục L ta được :

$$OH_k = x_k\cos\alpha + y_k\cos\beta + z_k\cos\gamma$$

Thay vào (*) ta được :

$$d^2{}_k = x^2{}_k + y^2{}_k + z^2{}_k - (x_k\cos\alpha + y_k\cos\beta + z_k\cos\gamma)^2 = x^2{}_k(1 - \cos^2\alpha) + y^2{}_k(1 - \cos^2\beta) + z^2{}_k(1 - \cos^2\gamma) - 2x_ky_k\cos\alpha\cos\beta - 2x_kz_k\cos\alpha\cos\gamma - 2y_kz_k\cos\beta\cos\gamma.$$

Chú ý rằng : $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Ta có :

$$d^2{}_k = x^2{}_k(\cos^2\beta + \cos^2\gamma) + y^2{}_k(\cos^2\alpha + \cos^2\gamma) + z^2{}_k(\cos^2\alpha + \cos^2\beta) - 2x_ky_k\cos\alpha\cos\beta - 2x_kz_k\cos\alpha\cos\gamma - 2y_kz_k\cos\beta\cos\gamma$$

$$d^2{}_k = (y^2{}_k + z^2{}_k)\cos^2\alpha + (z^2{}_k + x^2{}_k)\cos^2\beta + (x^2{}_k + y^2{}_k)\cos^2\gamma - 2x_ky_k\cos\alpha\cos\beta - 2x_kz_k\cos\alpha\cos\gamma - 2y_kz_k\cos\beta\cos\gamma.$$

Do đó mômen quán tính của vật đối với L bằng :

$$J_L = \cos^2\alpha\sum m_k(y^2{}_k + z^2{}_k) + \cos^2\beta\sum m_k(y^2{}_k + x^2{}_k) + \cos^2\gamma\sum m_k(x^2{}_k + y^2{}_k) -$$
$$-2\cos\beta\cos\gamma\sum m_ky_kz_k - 2\cos\alpha\cos\gamma\sum m_kz_kx_k - 2\cos\alpha\cos\beta\sum m_kx_ky_k$$

Hay:

$$J_L = J_x.\cos^2\alpha + J_y.\cos^2\beta + J_z.\cos^2\gamma - 2J_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2J_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2J_{zx}\cos\gamma\cos\alpha$$

Trong đó J_x, J_y, J_z là mômen quán tính của vật đối với các trục toạ độ còn các đại lượng :

$$J_{yz} = \sum m_k y_k z_k \ , \ J_{zx} = \sum m_k z_k x_k \ , \ J_{xy} = \sum m_k x_k y_k \qquad (2.10)$$

(2.10) được gọi là những mômen tích quán tính (hay còn gọi là mômen quán tính ly tâm) của vật trong hệ toạ độ Oxyz.

Với công thức (2.9) chúng ta đã chứng minh được định lý 1.2 :

Mômen quán tính của vật thể đối với một trục bất kỳ đi qua gốc toạ độ hoàn toàn có thể xác định được nếu biết toạ độ và mômen quán tính trong hệ toạ độ đó.

V. Trục quán tính chính và trục quán tính chính trung tâm :

Ta thấy các đại lượng J_{xy}, J_{yz}, J_{zx} phụ thuộc vào vị trí của điểm O và phương của các trục tọa độ. Nếu đối với một hệ trục tọa độ Oxyz nào đó ta có $J_{xy} = J_{yz} = 0$ thì trục Oz được gọi là trục quán tính chính của vật thể đối với điểm O. Có thể chứng minh được rằng tại mỗi điểm của vật thể luôn luôn tồn tại ba trục quán tính chính vuông góc với nhau. Các trục quán tính chính đối với khối tâm được gọi là trục quán tính chính trung tâm.

Mômen quán tính của vật đối với trục quán tính chính gọi là mômen quán tính chính, còn đối với trục quán tính chính trung tâm thì gọi là mômen quán tính chính trung tâm.

Dễ dàng chứng minh được rằng trục quán tính chính trung tâm của vật là trục quán tính chính đối với mọi điểm thuộc trục ấy.

Trục quán tính của vật đối xứng đồng chất có thể tìm được dễ dàng nhờ hai định lý sau đây :

Định lý 1.3: Trục đối xứng của vật đồng chất là trục quán tính chính của vật đối với mọi điểm thuộc trục ấy.

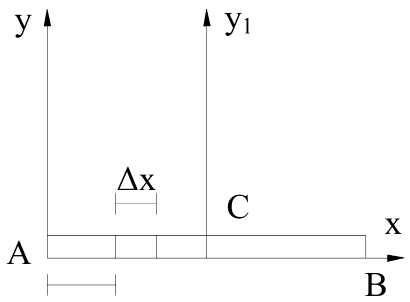
Định lý 1.4: Trục thẳng góc với mặt phẳng đối xứng của vật đồng chất là trục quán tính chính đối với giao điểm của trục và mặt phẳng đối xứng.

Hai định lý này dễ dàng được chứng minh bằng cách sử dụng tính đối xứng của vật thể để tính các biểu thức của mômen quán tính ly tâm.

VI. Cách tính mômen quán tính của một số vật đồng chất đơn giản :

a) Thanh đồng chất : Tính mômen quán tính của thanh mảnh AB đồng chất có chiều dài l và khối lượng M, đối với trục Ay vuông góc với thanh và đi qua đầu A của nó (Hình 11). Muốn vậy ta chia thanh ra nhiều phần tử. Xét một phần tử cách

Ay một khoảng x_k và có độ dài Δx_k khối lượng của nó là $m_k = \gamma\Delta x_k$ (γ là khối lượng riêng trên một đơn vị độ dài : $\gamma = M/l$)



Hình 11

Mômen quán tính của thanh đối với trục Ay bằng :

$$J_{Ay} = \sum m_k d^2{}_k = \sum \gamma x^2{}_k \Delta x_k$$

Chuyển tổng đó tới hạn ta được :

$$J_{Ay} = \int_0^l \gamma x^2 dx = \frac{\gamma l^3}{3} = \frac{1}{3}Ml^2$$

Áp dụng địng lý Huygen ta có thể chứng minh được mômen quán tính của thanh đối với trục khác vuông góc với thanh. Khi trục đi qua điểm giữa của thanh ta có :

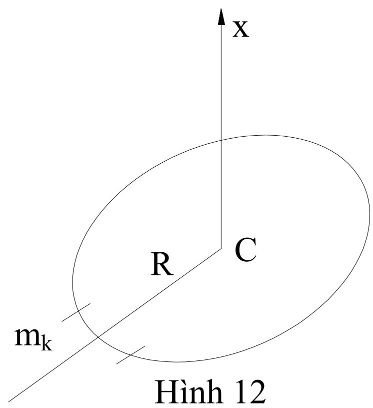
$$J_{Cy1} = J_{Ay} - M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}Ml^2 - \frac{1}{4}Ml^2 = \frac{1}{12}Ml^2$$

b)Vòng tròn đồng chất : Tính mômen quán tính của một vòng tròn đồng chất bán kính R, khối lượng M đối với trục C qua tâm C của vòng trìn và thẳng góc với mặt phẳng của nó. (Hình 11).

Ta có :

$$J_{Cz} = \sum m_k r^2{}_k = \sum m_k R^2 = MR^2 \qquad \text{(b)}$$

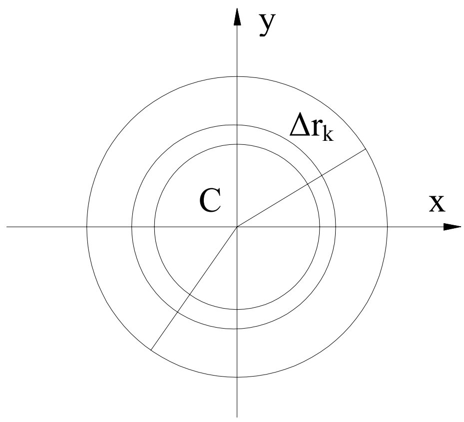
Công thức (b) cũng được dùng để tính mômen quán tính của vỏ hình trụ mỏng đối với trục của nó.



Hình 12

c)Tấm tròn đồng chất : Tính mômen quán tính của một tấm tròn mỏng đồng chất bán kính R, khối lượng M, đối với trục Cz qua tâm, thẳng góc với tấm và đối với các trục Cx, Cy trùng với trục đường kính của nó.

Muốn vậy, chia tấm thành nhiều vành tròn nhỏ, mỗi vành tròn có bán kính r_k độ rộng Δr_k và khối lượng $m_k = \gamma 2\pi r_k \Delta r_k$, trong đó γ là khối



Hình 13

lượng riêng trên một đơn vị diện tích $\gamma = \dfrac{M}{\pi R^2}$

Theo công thức (b) mômen quán tính vành k đối với trục Cz bằng :

$$\Delta J_{Cz} = m_k r^2_k = \gamma 2\pi r_k \Delta r_k r^2_k = \gamma 2\pi r^3_k \Delta r_k$$

Mômen quán tính của tấm tròn đối với trục Cz bằng tổng của mômen quán tính của các vành tròn đối với trục đó :

$$J_{Cz} = \sum \Delta J_{Cz} = \sum \gamma 2\pi r_k{}^3 \Delta r_k$$

Chuyển tới giới hạn ta có :

$$J_{Cz} = \int_0^R \gamma 2\pi r^3 dr = \frac{1}{2}\gamma\pi R^4 = \frac{1}{2}MR^2 \qquad \text{(c)}$$

Để tính các mômen quán tính J_{cx}, J_{cy} của tấm đối với trục Cx, Cy ta nhận thấy rằng với mọi điểm thuộc tấm $Z_k = 0$, vì vậy theo công thức (2.4) :

$$J_{Cx} = \sum m_k y_k{}^2 \,,\; J_{Cy} = \sum m_k x_k{}^2 \,,\; J_{Cz} = \sum m_k (x_k{}^2 + y_k{}^2)$$

Từ đó suy ra :

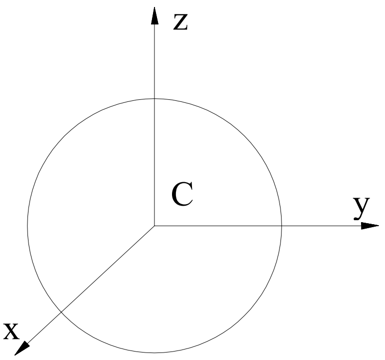
$$J_{Cx} + J_{Cy} = J_{Cz}.$$

Sự phân bố khối lượng của tấm đối với các trục Cx, Cy là hoàn toàn như nhau, vì vậy ta có :

$$J_{Cx} = J_{Cy} = \frac{1}{2}J_{Cz} = \frac{1}{4}MR^2$$

d)Khối cầu đồng chất : Do tính đối xứng nên trong trường hợp này :

$$J_{Cx} = J_{Cy} = \frac{1}{2}J_{Cz} = \frac{2}{5}MR^2 \qquad \text{(d)}$$



Hình 14

e) Tấm chữ nhật khối lượng M có cạnh AB = a, BD = b (trục x hướng theo Ab, y hướng theo BD):

$$J_x = \frac{1}{3}Mb^2 \,,\; J_y = \frac{1}{3}Ma^2 \quad \text{(e)}$$

f) Khối nón liên tục có khối lượng M, bán kính đáy R (z hướng theo khối nón)

$$J_z = 0.3MR^2 \qquad \text{(f)}$$

§2. ĐỊNH LÝ VỀ BIẾN THIÊN ĐỘNG LƯỢNG VÀ ĐỊNH LÝ VỀ CHUYỂN ĐỘNG KHỐI TÂM.

2.1 Định lý về biến thiên động lượng :

1. Động lượng : Động lượng của chất điểm là một đại lượng véctơ bằng tích khối lượng của chất điểm với véctơ vận tốc của nó :

$$\vec{k} = m.\vec{v} \qquad (2.11)$$

- Động lượng của hệ là tổng hình học động lượng của tất cả các chất điểm của nó.

$$\vec{K} = \sum m_k.\vec{v}_k \qquad (2.12)$$

Nếu hệ nhiều vật thì động lượng của hệ bằng tổng hình học động lượng của mỗi vật. Đơn vị đo động lượng là kg.m/s.

Động lượng có thể xác định qua khối lượng của hệ và vận tốc của khối tâm. Thật vậy theo định nghĩa khối tâm ta có :

$$\sum m_k\vec{r}_k = M.\vec{r}_C$$

Đạo hàm hai vế lên theo thời gian ta được :

$$\sum m_k\dot{\vec{r}}_k = M.\dot{\vec{r}}_C$$

Hay :

$$\sum m_k\vec{v}_k = M.\vec{v}_C$$

Thế vào (2.12) ta được :

$$\vec{K} = M\vec{v}_C \qquad (2.13)$$

Vậy : Động lượng của hệ bằng tích khối lượng của toàn hệ với vận tốc khối tâm của nó.

Hình chiếu véctơ động lượng lên các trục tọa độ sẽ là :

$$K_x = \sum m_k\dot{x}_k = M\dot{x}_C, \quad K_y = \sum m_k\dot{y}_k = M\dot{y}_C, \quad K_z = \sum m_k.\dot{z}_k = M\dot{z}_C$$

Từ (2.13) suy ra rằng động lực của cơ hệ đối với hệ trục bất kỳ Cx'y'z' có gốc tọa độ ở khối tâm C và chuyển động cùng với tâm này sẽ bằng không vì đối với hệ tọa độ này $\vec{v}_C$ = 0. Một trường hợp riêng thường gặp sẽ là chuyển động của một vật rắn quanh một trục cố định. Nếu trục quay đi qua khối tâm thì động lượng của vật trong chuyển động đó sẽ bằng không.

II. Xung lượng lực :

Để biểu thị tác dụng của lực lên một vật thể trong một khoảng thời gian người ta đưa ra khái niệm xung lượng của lực.

Đại lượng véctơ, kí hiệu $d\vec{s}$ bằng lực nhân với khoảng thời gian vô cùng bé dt :

$$d\vec{s} = \vec{F}.dt \quad (2.14)$$

gọi là xung lượng nguyên tố của lực.

Xung lượng của lực trong khoảng thời gian hữu hạn từ t_0 đến t_1 nào đó là đại lượng :

$$\vec{s} = \int_{t0}^{t1} \vec{F}dt \quad (2.15)$$

Hình chiếu xung lượng của lực trên các trục tọa độ sẽ là :

$$S_x = \int_{t0}^{t1} F_x dt,\ \ S_y = \int_{t0}^{t1} F_y dt,\ \ S_z = \int_{t0}^{t1} F_z dt \quad (2.16)$$

III. Định lý về động lượng :

Định lý 2.1 : Đạo hàm theo thời gian động lượng của chất điểm bằng tổng hình học các lực tác dụng lên chất điểm ấy.

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \sum \vec{F}_k \qquad (2.17)$$

Phương trình (2.17) thực tế là một cách viết khác phương trình cơ bản của động lực học (1.4).

Định lý 2.2 : Đạo hàm theo thời gian của động lượng của cơ hệ bằng véctơ, chính các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ.

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum \vec{F}^e{}_k \qquad (2.18)$$

Chứng minh: Gọi tổng các ngoại lực và tổng các nội lực tác dụng lên chất điểm thứ k là $\vec{F}^e{}_k$ và $\vec{F}^i{}_k$.

Theo (2.17) đối với mọi điểm thuộc hệ ta có :

$$\frac{d(m_k\vec{v}_k)}{dt} = \vec{F}^e{}_k + \vec{F}^i{}_k \qquad \text{(k= 1,2...n)}$$

Cộng từng vế phương trình này ta được :

$$\frac{d}{dt}\sum m_k\vec{v}_k = \sum \vec{F}^e{}_k + \sum \vec{F}^i{}_k$$

Vì $\sum \vec{F}^i{}_k = 0$ và $\sum m_k\vec{v}_k = \vec{K}$ nên :

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum \vec{F}^e{}_k \text{ (Định lý đã được chứng minh)}$$

Định lý 2.3 : Biến thiên động lượng của chất điểm trong khoảng thời gian nào đó bằng tổng xung lượng của các lực tác dụng lên chất điểm trong khoảng thời gian đó.

$$m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0 = \sum \vec{S}_k \qquad (2.19)$$

Chứng minh: Từ (2.17) ta có :

$$d(m\vec{v}) = \sum \vec{F}_k.dt$$

Tích phân hai vế đẳng thức này với các cận tương ứng ta được :

$$\int_{m\vec{v}0}^{m\vec{v}1} d(m\vec{v}) = \int_{to}^{t1}\sum \vec{F}_k.dt = \sum \int_{t0}^{t1}\vec{F}_k dt = \sum \vec{S}_k$$

Hay : $m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0 = \sum \vec{S}_k$.

Định lý 2.4 : Biến thiên động lượng của cơ hệ trong một khoảng thời gian nào đó bằng tổng xung lượng của tất cả các ngoại lực tác dụng lên hệ trong khoảng thời gian đó.

$$\vec{K}_1 - \vec{K}_0 = \sum \vec{S}^e{}_k \qquad (2.20)$$

Chứng minh : Từ (2.18) ta có :

$$d\vec{K} = \sum \vec{F}^e{}_k.dt$$

Tích phân hai vế đẳng thức này với các cận tương ứng ta được :

$$\int_{\vec{k}0}^{\vec{k}1} d\vec{K} = \int_{to}^{t1}\sum \vec{F}^e{}_k.dt = \sum \int_{t0}^{t1}\vec{F}^e{}_k dt = \sum \vec{S}^e{}_k$$

Hay : $\vec{K}_1 - \vec{K}_0 = \sum \vec{S}^e{}_k$.

Các định lý 2.1, 2.2 là định lý biến thiên động lượng của chất điểm dưới dạng vi phân còn các định lý 2.3 và 2.4 là các định lý viết dưới dạng hữu hạn.

Chiếu các hệ thức (2.17), (2.18), (2.19) và (2.20) xuống các trục tọa độ chúng ta sẽ được các biểu thức vô hướng thường dùng trong tính toán.

IV. Định luật bảo toàn động lượng :

Từ biểu thức (2.18) suy ra rằng :

Nếu $\sum \vec{F}^e{}_k = 0$ thì $\vec{K} = \overrightarrow{const}$

Đẳng thức (2.21) biểu thị định luật bảo toàn động lượng của hệ.

Nếu tổng các ngoại lực tác dụng lên hệ luôn luôn bằng không thì véctơ động lượng của hệ sẽ không thay đổi.

Trong thực tế xảy ra những trường hợp khi $\sum \vec{F}_k \neq 0$ nhưng tổng hình chiếu của các ngoại lực lên một trục nào đó bằng không chúng ta sẽ có định luật bảo toàn hình chiếu động lượng của hệ lên hệ trục đó như sau:

Nếu tổng hình chiếu của các ngoại lực tác dụng lên hệ trên một trục nào đó bằng không thì hình chiếu véctơ động lượng lên trục đó sẽ không thay đổi.

2.2 Định lý chuyển động của khối tâm :

Nếu ta tính động lượng của hệ theo công thức (2.13) qua vận tốc khối tâm của hệ và thay vào biểu thức (2.18) ta được :

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d}{dt}(M\vec{W}_C) = M\vec{W}_C = \sum \vec{F}^e{}_k \qquad (2.22)$$

Biểu thức (2.22) được phát biểu dưới dạng một định lý như sau :

Định lý 2.5: Trong chuyển động của cơ hệ một khối tâm chuyển động như một chất điểm có khối lượng bằng khối lượng của toàn hệ và chịu tác dụng của lực được biểu diễn bằng véctơ chính của ngoại lực đã đặt vào hệ.

Chiếu (2.22) lên các trục toạ độ ta được :

$$\begin{cases} M\ddot{x}_C = \sum F^e{}_x \\ M\ddot{y}_C = \sum F^e{}_y \\ M\ddot{z}_C = \sum F^e{}_z \end{cases} \qquad (2.22')$$

Các phương trình (2.22') là những phương trình vi phân chuyển động khối tâm của hệ trong toạ độ Đề-cát.

Từ (2.22) ta thấy rằng nếu $\sum \vec{F}^e{}_k = 0$ thì $\vec{W}_C = 0$ hay $\vec{W}_C = $ const nghĩa là :

Nếu véctơ chính của hệ ngoại lực tác dụng lên cơ hệ bằng không thì khối tâm của hệ sẽ đứng yên hay chuyển động thẳng đều.

Đó là định luật bảo toàn chuyển động khối tâm của cơ hệ.

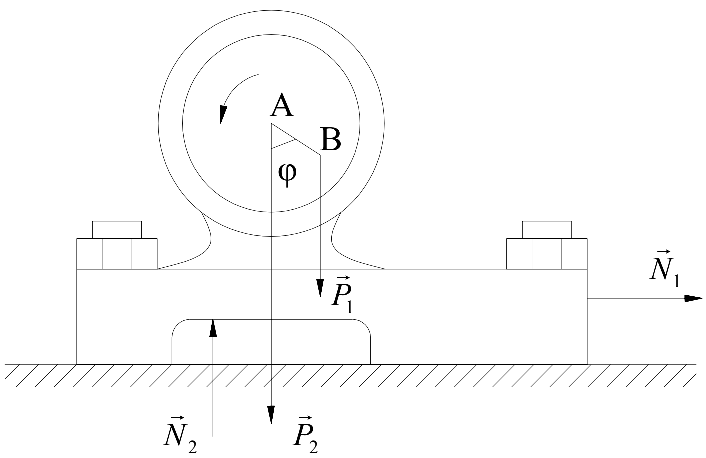
Tương tự như đã nói ở phần trên nếu tổng hình chiếu của các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ trên một trục nào đó bằng không thì hình chiếu của khối tâm trên trục đó sẽ đứng yên hay chuyển động thẳng đều.

Một số ví dụ minh hoạ :

1. Hiện tượng súng giật khi bắn : Xét cơ hệ gồm súng và đạn trong nòng súng. Khi đạn nổ xuất hiện một xung lực, xung lực đó là nội lực, không thể làm thay đổi chuyển động khối tâm của cơ hệ vì vậy nên đạn bay về phía trước thì súng sẽ chuyển động theo chiều ngược lại gây ra hiện tượng giật.
2. Người ta không thể đi được trên mặt phẳng nằm ngang trơn lý tưởng bởi vì tổng hình chiếu của các ngoại lực tác dụng lên người, gồm trọng lực và phản lực pháp tuyến của mặt phẳng trên phương ngang bằng không. Lực của cơ bắp là nội lực không thể làm cho cơ thể di chuyển được. Trong thực tế chúng ta đi được là nhờ lực ma sát giữa bàn chân và mặt ngang.

Ví dụ 2.1 : Khối lượng bánh đà của một mô-tơ bằng m_1 còn khối lượng các phần còn lại là m_2. Bánh đà quay đều với vận tốc góc ω.

Khối tâm của nó lệch trục một khoảng AB = a. Tính phản lực tựa của nền và bu-lông giữ mô-tơ với giả thuyết rằng phản lực tương đương với một hợp lực với các thành phần $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ (Hình vẽ)



Hình 15

Giải :

Những ngoại lực tác dụng lên mô-tơ trong trường hợp này là $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ và $\vec{N}_1, \vec{N}_2$. Phương trình (2.22) chiếu lên các trục tọa độ x, y sẽ là :

$$M\ddot{x}_C = N_1$$
$$M\ddot{y}_C = N_2 - (m_1 + m_2)g$$

trong đó : M = $m_1 + m_2$. C là khối tâm của cơ hệ.

Trong trường hợp này chuyển động của khối tâm đã biết qua quy luật quay của bánh đà cụ thể là :

$$Mx_C = m_2 x_A + m_1(x_A + a\sin\omega t)$$
$$My_C = m_2 y_A + m_1(y_A - a\cos\omega t)$$

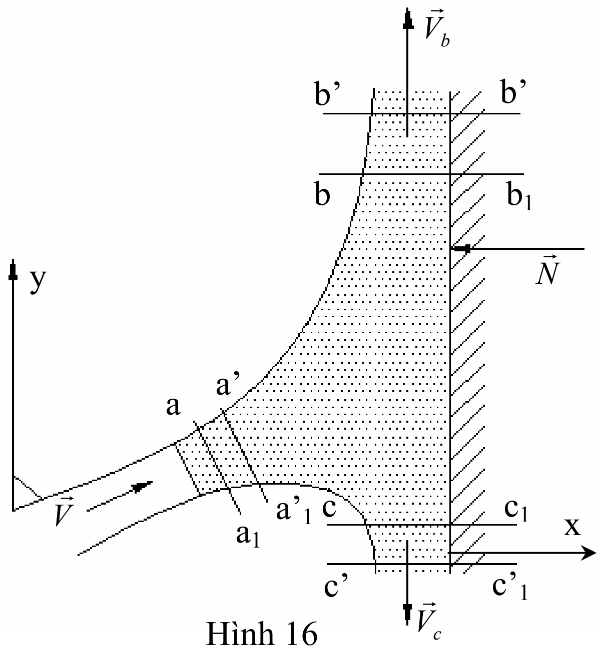
Vì : x_A = const, y_A = const nên :

$$M\ddot{x}_C = -m_1 a\omega^2 \sin\omega t$$
$$M\ddot{y}_C = m_1 a\omega^2 \cos\omega t$$

Nên :

$$N_1 = -m_1 a\omega^2 \sin\omega t$$
$$N_2 = (m_1 + m_2)g + m_1 a\omega^2 \cos\omega t$$

Ví dụ 2.2: (Áp dụng dòng chảy lỏng). Một cột chất lỏng chảy ra từ ống có diện tích thiết diện là S với vận tốc $\vec{v}$ nghiêng một góc so với phương thẳng đứng (hình 16). Xác định áp lực tổng hợp của dòng chảy lên tường đứng, xem dòng chảy là dừng.



Hình 16

Giải : Sử dụng phương trình (2.20) cho khối chất lỏng giới hạn bởi các thiết diện aa_1, bb_1, cc_1. Bỏ qua áp lực tại thiết diện aa_1và xem rằng khi gặp tường các phần tử chất lỏng không bị bắn trở lại.

Xét trong khoảng thời gian $t_1 - t_0 = 1$ giây. Ngoại lực tác dụng lên khối chất lỏng trong thời gian gồm trọng lực và phản lực $\vec{N}$.

$$\vec{K}_1 - \vec{K}_0 = \int_{t0}^{t1} (\vec{P} + \vec{N})dt \qquad \text{(a)}$$

Trong khoảng thời gian 1 giây các thiết diện aa_1, bb_1, cc_1 dịch chuyển đến các vị trí $a'a'_1$, $b'b'_1$, $c'c'_1$ và biến thiên động lượng của khối nước trong khoảng thời gian đó sẽ là :

$$\vec{K}_1 - \vec{K}_0 = -m_1\vec{v}_a + m_2\vec{v}_b + m_3\vec{v}_c \qquad \text{(b)}$$

Trong đó m_1, m_2, m_3 là khối lượng chất lỏng trong khối $aa_1a'a'_1$, $bb_1b'b'_1$, $cc_1c'c'_1$.

Ta có $m_1 = \rho Sv$ (trong đó ρ là khối lượng riêng của chất lỏng).

Thế (b) vào (a) xem N = const và chiếu hai vế lên trục x ta được ($\vec{v}_b, \vec{v}_c \perp x$)

$$-\rho Sv^2\sin\alpha = -N$$

hay : $$N = \rho Sv^2\sin\alpha$$

§3. ĐỊNH LÝ VỀ MÔMEN ĐỘNG LƯỢNG

3.1 Các định nghĩa và khái niệm :

1- Mômen của véctơ động lượng $m\vec{v}$ đối với tâm O (hay trục z) được kí hiệu là $\vec{l}_0$ hay $\vec{l}_z$ và được gọi tương ứng là mômen động lượng của điểm đối với tâm O hay trục đó.

Cách tính mômen của véctơ động lượng cũng giống như cách tính mômen của lực. Như đã biết trong phần Tĩnh học ta có :

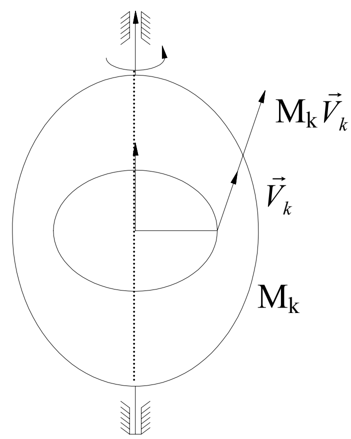
$$\vec{l}_0 = m_0(m\vec{v}) = \vec{r} \wedge m\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix} \qquad (2.23)$$

$$l_z = m_z(m\vec{v}) = hc_z(\vec{l}_0) \qquad (2.24)$$

2- Mômen chính động lượng của hệ đối với tâm (hay một trục) bằng tổng mômen động lượng của tất cả các điểm thuộc hệ đối với tâm (hay trục) đó :

$$\vec{L}_0 = \sum \vec{l}_{0k} = \sum (\vec{r}_k \wedge m_k\vec{v}_k) \qquad (2.25)$$

$$L_z = \sum l_{zk} = \sum hc_z\vec{l}_{0k} \qquad (2.26)$$



Hình 17

3- Mômen chính động lượng của vật rắn quay quanh trục cố dịnh đối với trục quay của nó. Giả sử vật rắn quay quanh trục z với vận tốc góc ω. Mômen động lượng của một phần tử M_k của vật đối với trục quay sẽ là :

$$l_{zk} = r_k m_k v_k$$

mặt khác $v_k = r_k\omega$ nên $l_{zk} = m_k r^2_k\omega$. Do đó mômen chính động lượng của vật đối với trục quay sẽ là $L_z = \sum l_{zk} = \sum m_k r^2{}_k\omega = \omega\sum m_k r^2{}_k = J_z\omega$

3.2 Định lý biến thiên mômen động lượng đối với tâm (hay trục) cố định :

a) Đối với chất điểm;

Định lý 3.1: Đạo hàm theo thời gian mômen động lượng của chất điểm đối với một tâm (hay một trục) bằng tổng hình học (hay tổng đại số) mômen của các lực tác dụng lên chất điểm đối với cùng tâm (hay trục) ấy :

$$\frac{d\vec{l}_0}{dt} = \sum \vec{m}_0(\vec{F}_k) \quad (2.27)$$

$$\frac{d\vec{l}_z}{dt} = \sum \vec{m}_z(\vec{F}_k) \quad (2.28)$$

Chứng minh : Giả sử chất điểm m chuyển động dưới tác dụng của hệ lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$. Phương trình cơ bản của động lực học trong trường hợp này có dạng :

$$m\vec{W} = \sum \vec{F}_k$$

hay :
$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \sum \vec{F}_k$$

Gọi $\vec{r}$ là bán kính véctơ từ gốc hệ trục tới chất điểm. Nhân véctơ $\vec{r}$ với hai vế của đẳng thức trên ta được :

$$\vec{r} \wedge \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{r} \wedge \sum \vec{F}_k$$

Ta có :
$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge m\vec{v}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge m\vec{v}) = \vec{v} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

Vì $\vec{v} \wedge m\vec{v} = 0$

Do đó ta có :
$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge m\vec{v}) = \vec{r} \wedge \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{dl_0}{dt}$$

$$\vec{r} \wedge \sum \vec{F}_k = \sum \vec{r} \wedge \vec{F}_k = \frac{dl_0}{dt} \qquad \text{(đpcm)}$$

II. Đối với cơ hệ :

Định lý 3.2 : Đạo hàm theo thời gian mômen chính động lượng của cơ hệ đối với tâm (hay một trục) bằng tổng mômen của các ngoại lực đối với tâm (hay trục) đó :

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum \vec{m}_0(\vec{F}^e{}_k) \qquad (2.29)$$

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum \vec{m}_z(\vec{F}^e{}_k) \qquad (2.30)$$

Chứng minh : Xét cơ hệ gồm n chất điểm, gọi $\vec{F}^e{}_k$ và $\vec{F}^i{}_k$ lần lượt là tổng các ngoại lực và tổng các nội lực tác dụng lên chất điểm thứ k. Đối với từng chất điểm của hệ theo (2.27) ta có :

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_k \wedge m_k\vec{v}_k) = \vec{r}_k \wedge \vec{F}_k^{\,e} + \vec{r}_k \wedge \vec{F}^i{}_k$$

Cộng từng vế các đẳng thức này ta được :

$$\sum_k \frac{d}{dt}(\vec{r}_k \wedge m_k\vec{v}_k) = \sum_k \vec{r}_k \wedge \vec{F}_k^{\,e} + \sum_k \vec{r}_k \wedge \vec{F}^i{}_k$$

Từ tính chất của các nội lực, ta có :

$$\sum_k \vec{r}_k \wedge \vec{F}^i{}_k = 0$$

nên :

$$\sum_k \frac{d}{dt}(\vec{r}_k \wedge m_k\vec{v}_k) = \sum_k \vec{r}_k \wedge \vec{F}_k^{\,e}$$

$$\frac{d}{dt}\sum_k (\vec{r}_k \wedge m_k\vec{v}_k) = \sum_k \vec{r}_k \wedge \vec{F}_k^{\,e}$$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum \vec{m}_0(\vec{F}^e{}_k) \qquad \text{(đpcm)}$$

Theo kết quả vừa nhận được (2.29) đúng với mọi điểm O, chọn O nằm trên trục z, chiếu 2 vế đẳng thức (2.29) lên trục z ta sẽ nhận được (2.30).

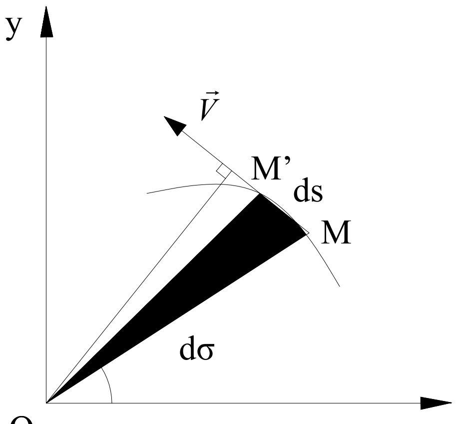
III. Định luật bảo toàn mômen động lượng :

Từ (2.29) chúng ta nhận thấy rằng, nếu :

$\sum \vec{m}_0(\vec{F}^e{}_k) = 0$ thì $\vec{L}_0 = \overrightarrow{const}$ (2.31)

Đẳng thức này biểu thị định luật bảo toàn mômen động lượng phát biểu như sau:

Nếu mômen chính của các ngoại lực tác dụng lên hệ đối với một tâm bằng không thì mômen chính động lượng của hệ đối với tâm ấy sẽ không đổi.



Hình 18

Định luật bảo toàn mômen động lượng

của cơ hệ đối với một trục được phát biểu hoàn toàn tương tự.

Một hệ quả trực tiếp có tầm quan trọng trong ứng dụng thực tiễn của định luật bảo toàn mômen động lượng là trường hợp khi chất điểm chịu tác dụng của lực xuyên tâm (lực có đường tác dụng luôn đi qua 1 điểm O nào đó).

Xét chuyển động của chất điểm M chuyển động dưới tác dụng của lực xuyên tâm $\vec{F}$ (hình 17).

Vì trong trường hợp này $m_0(\vec{F}) = 0$ nên

$$\vec{m}_0(m\vec{v}) = \vec{r} \wedge m\vec{v} = \overrightarrow{const}$$

Vì véctơ $\vec{m}_0(m\vec{v})$ có hướng vuông góc với mặt phẳng chứa véctơ $\vec{r}$ và $\vec{v}$ nên nếu :

$\vec{m}_0(m\vec{v}) = \overrightarrow{const}$ thì véctơ $\vec{r}$ và $\vec{v}$ phải luôn nằm trong cùng một mặt phẳng, nghĩa là quỹ đạo của M là một đường cong phẳng và $\left|\vec{m}_0(m\vec{v})\right| = vh = const$.

Mặt khác : $$vh = \frac{ds}{dt}h = 2\frac{d\sigma}{dt}$$

($d\sigma$ là diện tích tam giác phân tố OMM'. Đại lượng $\frac{d\sigma}{dt}$ xác định vận tốc tăng của của diện tích phần mặt phẳng do bán kính $\overrightarrow{OM}$ quét được khi điểm M chuyển động gọi là vận tốc hạt quay vận tốc diện tích. Trong trường hợp đang xét :

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2}\left|\vec{m}_0(m\vec{v})\right| = const$$

Những điều trên chứng tỏ rằng trong chuyển động dưới tác dụng của lực xuyên tâm, điểm chuyển động theo đường cong thẳng với vận tốc quạt không đổi, tức là chuyển động sao cho trong một khoảng thời gian bằng nhau, bán kính véctơ của điểm quét được những diện tích bằng nhau (định luật các diện tích). Đây là một trong những định luật Kepler.

Định luật bảo toàn mômen động lượng cho phép ta giải thích một số hiện tượng, chẳng hạn hiện tượng quay thân máy bay lên thẳng khi cất cánh (trong trường hợp không có cánh quạt lái). Thật vậy gọi trục Cz là trục thẳng đứng qua khối tâm C của máy bay, ta có :

$$L_Z(\text{máy bay}) + L_Z(\text{cánh quạt}) = 0$$

Do đó : L_Z(máy bay) = - L_Z(cánh quạt)

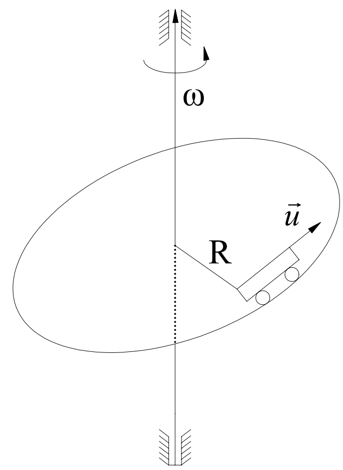
Nghĩa là máy bay phải quay ngược chiều với cánh quạt.

IV. Một số ví dụ áp dụng :

Chúng ta có thể sử dụng định lý biến thiên mômen động lượng để nghiên cứu chuyển động quay của các vật hay để nghiên cứu các hệ có vật chuyển động quay hay tịnh tiến.

Theo định luật bảo toàn mômen động lượng ta có thể xác định sự biến thiên của vận tốc (hay góc quay) của một bộ phận nào đó của hệ theo độ dời vận tốc góc của bộ phận khác.

Ví dụ 2.2 : Đường ray đặt theo vành của một sân tròn nằm ngang có trọng lượng P, bán kính R. Sân cùng đầu máy trọng lượng Q đứng yên trên ray đang quay quanh trục thẳng đứng Oz với vận tốc góc ω_0. Tại thời điểm nào đó người ta bắt đầu cho máy chạy trên ray với vận tốc tương đối u (đối với sân quay) theo chiều quay của sân. Hãy xác định vận tốc góc của sân.



Hình 19

Bài giải : Xét hệ gồm sân quay, đầu máy. Các mômen của các ngoại lực tác dụng lên hệ đối với trục z bằng không do đó L_z = const. Xem sân quay như một đĩa tròn đồng chất ($J_z = 0.5MR^2$) còn đầu máy như một chất điểm, ta có :

$$K_{z0} = (0,5\frac{P}{g}R^2 + \frac{Q}{g}R^2)\omega_0.$$

Khi đầu máy bắt đầu chạy, vận tốc tuyệt đối của nó bằng : $v_a = u + \omega R$, trong đó ωlà vận tốc góc tức thời của sân quay. Mômen động lượng của đầu máy đối với trục z khi đó sẽ bằng $m.v_a.R$ và của cả hệ sẽ là :

$$K_{z0} = (0,5\frac{P}{g}R^2 + \frac{Q}{g}(uR + R^2\omega)$$

Vì $K_{z1} = K_{z0}$ nên ta tìm được :

$$\omega = \omega_0 - \frac{Q}{0,5P + Q}.\frac{u}{R}$$

§4.ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN ĐỘNG NĂNG

I. Động năng :

- Động năng của chất điểm là đại lượng vô hướng, kí hiệu T, bằng nửa tích khối lượng của chất điểm với bình phương vận tốc của nó :

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \quad (2.32)$$

- Động năng của hệ là tổng động năng của tất cả các chất điểm thuộc hệ :

$$T = \sum_k \frac{1}{2} m_k v_k{}^2 \qquad (2.33)$$

Trong trường hợp đặc biệt nếu hệ gồm nhiều vật thì động năng của hệ bằng tổng động năng của các vật.

- Động năng của vật rắn trong một số chuyển động cơ bản.

a) Vật rắn chuyển động tịnh tiến : Trong trường hợp này vận tốc của mọi điểm đều bằng nhau và bằng v_c nên :

$$T = \sum_k \frac{1}{2} m_k v_k{}^2 = \frac{1}{2} V_C{}^2 \sum m_k = \frac{1}{2} M V_C{}^2 \quad \text{(a)}$$

b) Vật rắn quay quanh trục cố định : Trong trường hợp này ta có

$$T = \sum_k \frac{1}{2} m_k v_k{}^2 = \frac{1}{2} \sum m_k (\omega . h_k)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_k . h_k = \frac{1}{2} J_z \omega^2 \qquad \text{(b)}$$

c) Vật rắn chuyển động song phẳng : Như chúng ta đã biết, trong chuyển động song phẳng, tại mỗi thời điểm vận tốc các điểm thuộc vật phân bố giông như vật quay quanh trục Δ vuông góc với mặt phẳng chuyển động và đi qua tâm vận tốc tức thời P vì vậy ta có thể sử dụng công thức (b) để tính động năng trong trường hợp này :

$$T = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2 \qquad \text{(c)}$$

Trong đó J_Δ là mômen quán tính của vật đối với trục quay tức thời và ω vận tốc góc tức thời.

Nếu biểu thức (c) ít được áp dụng trong thực tế vì tâm vận tốc tức thời luôn luôn thay đổi nên J cũng biến đổi theo thời gian. ta có thể dùng định lý Huygen để biến đổi (c) về dạng dễ ứng dụng hơn. Gọi J_C là mômen quán tính của vật đối với trục song song với Δ và đi qua khối tâm C.

Ta có : $J_\Delta = J_C + Md^2$ (d = CF)

Thay vào (c) ta được :

$$T = \frac{1}{2}(J_C + Md^2)\omega^2 = \frac{1}{2}J_C\omega^2 + \frac{1}{2}Md^2\omega^2$$

Nhưng d.ω = cp.ω = v_C, do đó :

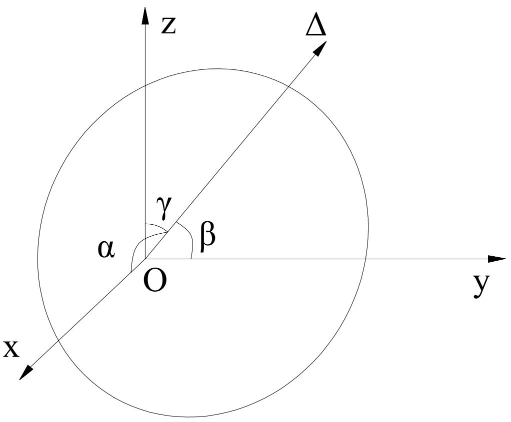
$$T = \frac{1}{2}J_C\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_c{}^2 \qquad \text{(d)}$$

d) Vật rắn quay quanh điểm cố định : Khi vật rắn quay quanh điểm cố định, tại mỗi thời điểm vận tốc các điểm thuộc vật phân bố như là vật quay quanh trục tức thời Δ đi qua điểm cố định đó vì vậy :

$$T = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2 \qquad \text{(e)}$$

Nếu gọi α, β, γ là các góc chỉ phương của Δ (Hình 19)

Theo công thức (2.9) ta có :



Hình 20

$$J_\Delta = J_x.\cos^2\alpha + J_y.\cos^2\beta + J_z.\cos^2\gamma - 2J_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2J_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2J_{zx}\cos\gamma\cos\alpha$$

Thay biểu thức này vào (e) và để ý rằng :

$$\omega.\cos\alpha = \omega_x,\ \omega.\cos\beta = \omega_y,\ \omega.\cos\gamma = \omega_z$$

Ta được :

$$T = \frac{1}{2}\left[J_x.\omega_x{}^2 + J_y.\omega_y{}^2 + J_z.\omega_y{}^2 - 2J_{xy}\omega_x\omega_y - 2J_{yz}\omega_y\omega_z - 2J_{zx}\omega_z\omega_x\right] \quad \text{(f)}$$

e) Trường hợp chuyển động tổng quát : Lấy khối tâm C của vật làm cực, vận tốc của các điểm được xác định như sau :

$$\vec{v}_k = \vec{v}_C + \vec{v'}_k$$

Trong đó : $v_k = \omega h_k$

$$v_k{}^2 = v^2{}_c + v'^2{}_k + 2.\vec{v}_C.\vec{v}'_k$$

$$T = \frac{1}{2}\sum m_k(v^2{}_c + v'^2{}_k + 2.\vec{v}_C.\vec{v}'_k)$$

$$= \frac{1}{2}Mv_C{}^2 + \frac{1}{2}\sum m_k\omega^2 h_k{}^2 + \vec{v}_C.\sum m_k\vec{v}'_k$$

vì : $$\frac{1}{2}\sum m_k\omega^2 h_k{}^2 = J_{cp}, \sum m_k\vec{v}'_k = M\vec{v}'_C$$

nên :

$$T = \frac{1}{2}Mv_C{}^2 + \frac{1}{2}J_{cp}.\omega^2 \qquad (g)$$

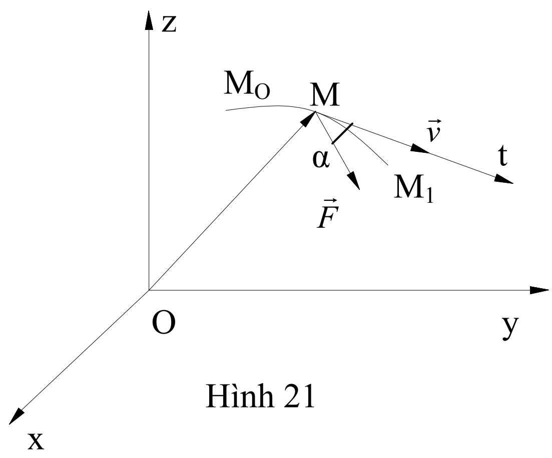
Vậy : Động năng của vật trong trường hợp chuyển động tổng quát bằng động năng của vật chuyển động tịnh tiến cùng với khối tâm cộng với động năng của chuyển động quay quanh trục đi qua khối tâm đó.

II. Công của lực :

Để biểu diễn tác động của lực trên độ dời của vật ta đưa vào khái niệm công của lực.

Cho lực $\vec{F}$ có điểm đặt dời chỗ trên đường cong (c) (Hình 20).

a) Công nguyên tố của lực : Công nguyên tố của lực $\vec{F}$ trên độ dời vô cùng bé ds của điểm đặt của nó là đại lượng vô hướng bằng :



Hình 21

$$dA = F\tau ds \qquad (2.34)$$

Hoặc: $$dA = Fds\cos\alpha \qquad (2.35)$$

Biểu thức công nguyên tố còn được viết dưới các dạng khác như sau :

vì ds = vdt nên dA = Fvcosαdt (2.36)

Gọi hình chiếu của $\vec{F}$ trên các trục tọa độ là F_x, F_y, F_z và của $d\vec{r}$ là dx, dy, dz biểu thức (2.37) được viết lại là :

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz \qquad (2.38)$$

(2.34), (2.35), (2.36), (2.37), (2.38) là các cách viết khác nhau của biểu thức công nguyên tố. Tùy các trường hợp cụ thể người ta dùng biểu thức này hoặc biểu thức khác để phép tính đơn giản hơn.

b) Công của lực trên quãng đường hữu hạn :

Công của lực trên độ dài hữu hạn bất kỳ bằng tổng các công nguyên tố do lực gây ra nên độ dời đó :

$$A_{M0M1} = \int_{M0M1} dA \qquad (2.39)$$

Đơn vị tính công là Jun hay Niutơn.mét.

$$1\ J = 1\ N.m = 1m^2kg^{-2}$$

Tùy dạng của biểu thức công nguyên tố mà khi tính công hữu hạn ta có các tích phân đường loại 1 hay loại 2.

III. Công mất :

Công mất là công sinh ra trong một đơn vị thời gian :

$$N = \frac{dA}{dt} \qquad (2.40)$$

Đon vị đo công suất là W.

$$1W = 1J/s$$

IV. Cách tính công trong một số trường hợp :

1. Công của trọng lực : Giả sử điểm M chịu tác dụng của trọng lực P dời chỗ từ $M_O(x_0, y_0, z_0)$ đến $M_1(x_1, y_1, z_1)$ theo đường cong M_0M_1. Với hệ trục như hình vẽ, áp dụng công thức (2.38) ta có:

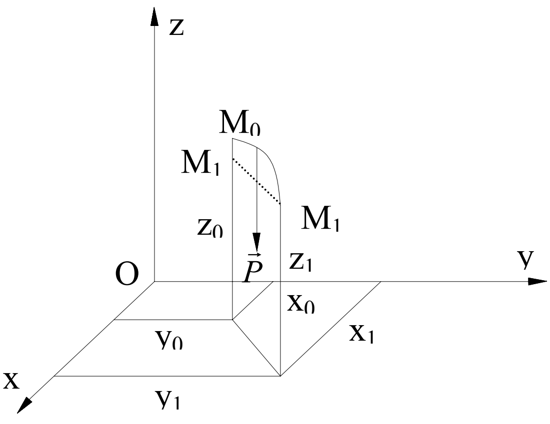
$$A_{M0M1} = \int_{M0M1} (P_x dx + P_y dy + P_z dz) = \int_{M0M1} (-P)dz = \int_{z0}^{z1} - Pdz = P(Z_0 - Z_1)$$

Gọi $|z_0 - z_1| = h$ ta có :

$$AM_0M_1 = \pm Ph \qquad (2.41)$$

Ta lấy dấu + nếu M_O ở cao hơn M_1 và lấy dấu – trong trường hợp ngược lại.

Với kết quả trên ta thấy rằng với công của trọng lực không phụ thuộc vào quỹ đạo chuyển của M và chỉ phụ thuộc vào vị trí đầu và cuối của quãng đường di chuyển.



Hình 22

2. Công của lực đàn hồi : Trong một số trường hợp, các liên kết tác dụng lên chất điểm khảo sát những tỷ lệ với các vécto định vị của chất điểm so với một tâm gọi là tâm đàn hồi, lực như vậy gọi là lực đàn hồi (ví dụ lực của lò xo chẳng hạn)

$\vec{F} = -c\vec{r}$

$$A_{M0M1} = \int_{M0M1} dA = \int_{M0M1} -c\vec{r}d\vec{r} = -\frac{c}{2}\int_{r0}^{r1} d(r^2) = -\frac{c}{2}(r_1^{\ 2} - r_0^{\ 2}) \qquad (2.42)$$

3. Công của lực tác dụng lên vật rắn chuyển động :

a) Trường hợp vật chuyển động tịnh tiến:

$$dA = \vec{F}d\vec{r}_C \quad (2.43)$$

b) Vật quay quanh trục cố định :

Vận tốc của điểm đặt lực M:

$$\vec{v}_M = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_M$$

$$dA = \vec{F}.d\vec{r}_M = \vec{F}.\vec{v}.dt = \vec{F}.(\vec{\omega} \wedge \vec{r}_M).dt = \vec{\omega}.(\vec{r}_M \wedge \vec{F}).dt = \vec{\omega}.\vec{m}_O(\vec{F}).dt = \omega.m_\Delta(\vec{F}).dt$$

Với Δ là trục quay.

Vậy : $$dA = \omega.m_\Delta(\vec{F}).dt = m_\Delta(\vec{F}).d\varphi \qquad (2.44)$$

c) Vật chuyển động tổng quát :

Chọn điểm A tùy ý làm cực, điểm đặt M của lực $\vec{F}$ có vận tốc :

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \ \ (\text{với } \vec{r} = \overrightarrow{AM})$$

Nên : $$dA = \vec{F}d\vec{r}_M = \vec{F}.\vec{v}_M.dt = \vec{F}.\vec{v}_A.dt + \vec{F}.(\vec{\omega} \wedge \vec{r}).dt$$

Theo các phép biến đổi đã trình bày ở phần *a)* và *b)* ta có :

$$dA = \vec{F}.d\vec{r}_A + m_\Delta(\vec{F}).d\varphi \qquad (2.45)$$

trong đó Δ- là trục quay tức thời của vật đi qua A.

4. Công của lực ma sát tác dụng lên vật lăn :

Giả sử bánh xe O lăn không trượt trên mặt phẳng nhám, lực ma sát $\vec{F}_{msM1}$ cản lại sự trượt của điểm tiếp xúc B.

Công nguyên tố của lực ma sát bằng :

$$dA = \vec{F}_{msmB}\vec{v}_B.dt$$

Vì B là tâm vận tốc của vật lăn không trượt nên $\vec{v}_B = 0$ nên dA = 0.

Vậy : khi lăn không trượt, công của lực ma sát trượt trong chuyển dời bất kỳ của vật bằng không.

Trong trường hợp vật trượt, công của lực ma sát luôn luôn âm.

5. Công của các nội lực của vật không biến hình :

Xét hai phần tử M_1 và M_2 thuộc vật. Lực tác dụng tương hỗ giữa chúng là $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ và có phương theo đường thẳng nối hai điểm đó. Công nguyên tố của các lực đó trên các độ dời $d\vec{r}_1$ và $d\vec{r}_2$ hiệu là dA_1 và dA_2 ta có :

$$dA_1 + dA_2 = \vec{F}_{12}d\vec{r}_1 + \vec{F}_{21}d\vec{r}_2 = \vec{F}_{12}\vec{v}_1dt + \vec{F}_{21}\vec{v}_2dt = \vec{F}_{12}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)dt$$

Vì $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_{M1M2}$ nên : $dA_1 + dA_2 = \vec{F}_{12}.\vec{v}_{M1M2}dt$

nhưng vì $\vec{v}_{M1M2} \perp M_1M_2$ tức vuông góc với $\vec{F}_{12}$

nên : $dA_1 + dA_2 = 0$.

vậy tổng công của tất cả các nội lực của vật rắn trong bất cứ chuyển động nào của vật đều bằng 0.

$$\sum_k dA^1{}_k = 0 \qquad (2.46)$$

V. Định lý biến thiên động năng :

Định lý 4.1 : Vi phân động năng của chất điểm bằng tổng đại số công nguyên tố của các lực tác dụng trên chất điểm ấy :

$$d(\frac{1}{2}mv^2) = \sum dA_k \qquad (2.47)$$

Chứng minh : Xét chất điểm chuyển động dưới tác dụng của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$.

Phương trình cơ bản của động lực học đối với chất điểm là :

$$m\vec{w} = \sum \vec{F}_k$$

Hay :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_k$$

Nhân vô hướng hai vế với $d\vec{r}$ ta được :

$$m\vec{v}\frac{d\vec{r}}{dt} = \sum \vec{F}_k d\vec{r}$$

Hay :

$$m\vec{v}.d\vec{v} = \sum dA_k$$

Vì $$\vec{v}.d\vec{v} = \frac{1}{2}d(\vec{v}.\vec{v}) = \frac{1}{2}d(v^2)$$

Nên : $$m\vec{v}d\vec{v} = \frac{1}{2}md(v^2) = d(\frac{1}{2}mv^2)$$

và ta có điều cần phải chứng minh.

Chú ý rằng nếu ta sử dụng khái niệm công suất thì định lý 4.1 có thể được phát biểu lại như sau :

Đạo hàm theo thời gian động năng của chất điểm bằng tổng đại số công suất của tất cả các lực tác dụng lên chất điểm đó.

Định lý 4.2 : Vi phân động năng của hệ bằng tổng đại số công nguyên tố của các ngoại lực và nội lực tác dụng vào các chất điểm của hệ:

$$dT = \sum dA^0{}_k + \sum dA^1{}_k \qquad (2.48)$$

Chứng minh : Áp dụng công thức (2.37) đối với từng chất điểm ta có :

$$d(\frac{1}{2}m_k v^2{}_k) = dA^0{}_k + dA^1{}_k$$

($dA^0{}_k$, $dA^1{}_k$ là tổng công nguyên tố của tất cả các ngoại lực, nội lực tác dụng lên chất điểm thứ k)

Viết phương trình trên cho tất cả các chất điểm của hệ và cộng từng vế các đẳng thức (*) ta được :

$$d\sum(\frac{1}{2}m_k v^2{}_k) = \sum dA^0{}_k + \sum dA^1{}_k$$

Hay : $dT = \sum dA^0{}_k + \sum dA^1{}_k$ (đpcm).

Định lý 4.3: Biến thiên động năng của chất điểm trên một độ dời hữu hạn bằng tổng đại số công của các lực tác dụng lên chất điểm trên cùng độ dời đó :

$$\frac{1}{2}mv^2{}_1 - \frac{1}{2}mv^2{}_0 = \sum A_{kM0M1} \qquad (2.49)$$

Chứng minh : Tích phân 2 vế công thức (2.37) theo các cận tương ứng ta được :

$$\frac{1}{2}mv^2{}_1 - \frac{1}{2}mv^2{}_0 = \sum A_{kM0M1} \text{ (đpcm)}$$

Định lý 4.4 : Biến thiên động năng của hệ trên một chuyển dời nào đó bằng tổng đại số công của các ngoại lực và nội lực đặt vào chất điểm trên các chuyển dời tương ứng :

$$T_1 - T_0 = \sum A^0{}_k + \sum A^1{}_k \quad (2.50)$$

Chứng minh : Trong chuyển dời của hệ từ vị trí 0 đến vị trí 1 chật điểm M_k của hệ dời chỗ từ M_{k0} đến M_{k1}. Theo (2.39) ta có :

$$\frac{1}{2}m_k v^2{}_{k1} - \frac{1}{2}m_k v^2{}_{k2} = A^e{}_k + A^i{}_k$$

($A^e{}_k$, $A^i{}_k$ – Tổng công các ngoại lực và nội lực tác dụng lên chất điểm M_k trên độ dời $M_{k0}M_{k1}$).

Cộng từng vế các dẳng thức này ta được :

$$\sum\frac{1}{2}m_k v^2{}_{k1} - \sum\frac{1}{2}m_k v^2{}_{k2} = \sum A^e{}_k + \sum A^i{}_k$$

Đây là điều phải chứng minh.

Các định lý 4.1, 4.2 là định lý động năng dưới dạng vi phân, các định lý 4.3, 4.4 là định lý động năng dưới dạng hữu hạn.

Tương tự như định lý 4.1, định lý 4.2 cũng có thể phát biểu dưới dạng khác.

Đạo hàm theo thời gian động năng cua hệ bằng tổng đại số công suất của ngoại lực và nội lực đặt vào các chất điểm thuộc hệ.

§5. ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN CƠ NĂNG

I. Trường lực : Trương lực là phần không gian vật lý mà khi ta đặt một chất điểm vào đó nó phải chịu tác dụng của một lực phụ thuộc vào vị trí của chất điểm ấy.

Trường trọng lực, trường đàn hồi là những ví dụ về trường lực.

Một lực được cho bởi ba hình chiếu của nó, vì vậy trường lực được xác định bởi hàm số :

$$F_x = \Phi_1(x,y,z),\ F_y = \Phi_1(x,y,z),\ F_z = \Phi_1(x,y,z) \quad (2.51)$$

Công của lực mà trường tác dụng lên chất điểm được tính theo biểu thức (2.39). Trong trường hợp tổng quát, để tính công theo biểu thúc (2.39) ta phải biết phương trình quỹ đạo của đường cong M_0M_1. Tuy nhiên nếu biểu thức dưới dấu tích phân (2.39) :

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

là vi phân toàn phần của một hàm U(x,y,z) nào đó thì như chúng ta đã biết, ta có thể tính công A_{M0M1} không cần biết quỹ đạo điểm M. Trong trường hợp này công của lực chỉ phụ thuộc vào vị trí đầu và cuối của điểm đặt di chuyển của lực.

Hàm U(x,y,z) gọi là hàm lực và trường lực như vậy gọi là trường lực thế :

$$A_{M0M1} = \int_{M0M1} dA = \int_{M0M1} dU(x,y,z) = U_1 - U_2 \qquad (2.52)$$

II. Thế năng :

Đối với các lực chúng ta có thể đưa vào một khái niệm thế năng là đại lượng dặc trưng về "dự trữ công" của tác dụng lên chất điểm tại vị trí của nó trong trường lực.

Để so sánh mức "dự trữ công" đó với nhau ta cần chọn một vị trí "O" nào đó "dự trữ công" bằng không (điểm chọn này là tùy ý".

Thế năng của chất điểm ứng với vị trí M là đại lượng vô hướng bằng công các lực của trường có thể sinh ra trên độ dời của điểm từ vị trí M đến vị trí "O".

$$\Pi = A_{MO}$$

Từ định nghĩa này ta thấy thế năng là một hàm của các tọa độ :

$$\Pi = \Pi(x,y,z)$$

Trong đó Π được gọi là hàm thế.

Thế năng tại vị trí nào đó là tổng công mà các lực của trường lực sinh ra trên những độ dời của các chất điểm thuộc hệ từ vị trí đó về vị trí "O".

$$\Pi = A_{1O}$$

$$\Pi = \Pi(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n)$$

Với các định nghĩa hàm lực và thế năng như trên, nếu ta chọn hàm lực sao cho tại vị trí "O" là $U_0 = 0$ thì ta sẽ có :

$$\Pi = A_{1O} = U_0 - U_1$$

$$\Pi = -U \qquad (2.53)$$

Từ đây ta thấy rằng khi xét các trường lực có thế ta có thể lấy khái niệm thế năng tha cho hàm lực. Từ (2.52) và (2.53) ta có :

$$A_{12} = \Pi_1 - \Pi_2 \qquad (2.54)$$

II. Định luật bảo toàn cơ năng :

Áp dụnh định lý biến thiên động năng cho hệ ta được :

$$T_1 - T_0 = \sum A^e{}_k + \sum A^i{}_k = \sum A_k$$

Nếu nội lực và ngoại lực tác dụng lên hệ đều là lực có thế ta có :

$$\sum A_k = \Pi_0 - \Pi_1 .$$

Do đó : $$T_1 - T_0 = \Pi_0 - \Pi_1$$

hay : $$T_1 + \Pi_1 = T_0 + \Pi_0 = const \qquad (2.55)$$

Ta có định luật bảo toàn cơ năng phát triển như sau :

Khi hệ chuyển động trong trường lực thế thì tổng động năng và cơ nănng của hệ không đổi.

Tổng động năng và thế năng của cơ hệ gọi là cơ năng và kí hiệu là E.

E = T + Π.

Hệ thức (2.55) gọi là tích phân năng lượng. Cơ hệ nghiệm đúng định luật bảo toàn cơ năng gọi là hệ bảo toàn. Lực tác dụng lên hệ đó là bảo toàn.

Nếu ngoài các lực bảo toàn ra còn có những lực không bảo toàn chẳng hạn như lực ma sát, tác dụng lên hệ thì cơ năng của hệ sẽ biến đổi do có sự trao đổi năng lượng giữa hệ với môi trường nghĩa là có sự chuyển hóa năng lượng.

Định luật bảo toàn cơ năng là một trường hợp riêng của định luật bảo toàn năng lượng trong vật lý.

Chú ý rằng, trong trường hợp hệ không biến hình, như chúng ta đã biết :

$$\sum A^i{}_k = 0$$

Và định lý biến thiên động năng có dạng :

$$T_1 - T_0 = \sum A^e{}_k$$

Nếu các ngoại lực tác dụng lên hệ là lực có thế :

$$\sum A^e{}_k = \Pi^e{}_0 - \Pi^e{}_1$$

Và ta có : $$T_1 - T_0 = \Pi^e{}_0 - \Pi^e{}_1$$

$$T_1 + \Pi^e{}_1 = T_0 + \Pi^e{}_0 = const$$

Nghĩa là : Khi xét cơ hệ không biến hình, trong biểu thức (2.55) ta chỉ cần xét đến thế năng của trường ngoại lực mà không cần để ý đến hệ nội lực.

§6. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Định lý biến thiiên động năng thường được dùng để giải các bài toán :

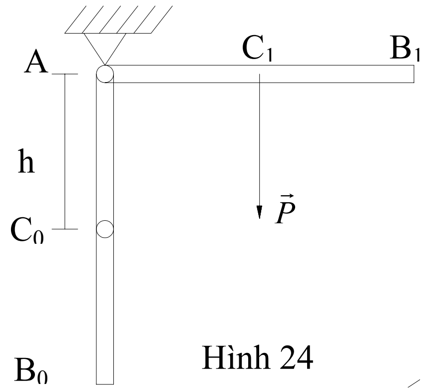
1) Tìm lực tác dụng lên vật.

2) Tìm độ dời của vật.

3) Tìm vận tốc của vật ở vị trí đầu hoặc vị trí cuối độ dời.

4) Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của hệ. Chủ yếu dùng cho hệ không biến hình, đối với hệ biến hình chúng ta chỉ có thể dùng định lí để giải toán trong trường hợp biết được các nội lực. Sau đây là một số ví dụ áp dụng :

Ví dụ 2.3 : Thanh AB với chiều dài l được treo bằng khớp vào điểm A (hình 23). Bỏ qua ma sát ở khớp, hãy xác định vận tốc góc ω_0 bé nhất cần phải truyền cho thanh để thanh có thể đạt tới vị trí nằm ngang.



Hình 24

Bài giải: Theo bài ra ta có : $\omega_1 = 0$, $B_0\hat{A}B_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

Tính ω_0

Phương trình (2.40) có dạng :

$$T_1 - T_0 = \sum A^e{}_k$$

Gọi M là khối lượng của thanh, có:

$$T_0 = \frac{1}{2}J_A\omega_0 = \frac{1}{6}Ml^2\omega^2{}_0$$

Ở vị trí cuối $\omega_1 = 0$ nên $T_1 = 0$.

Vì không tính đến lực ma sát nên chỉ có lực $\vec{P} = m\vec{g}$ sinh ra công trong chuyển dời trên của vật :

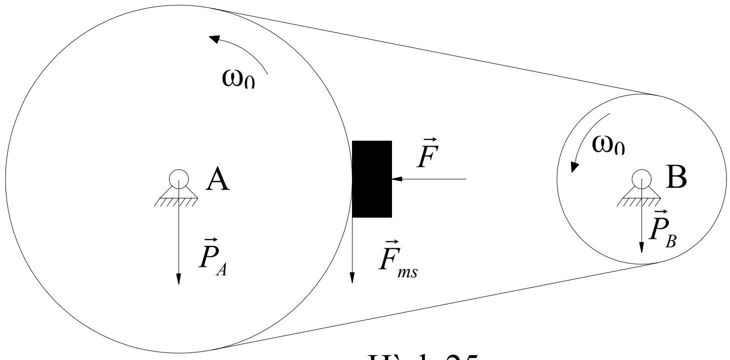
$$A^e = -P.h_c = -Mg\frac{l}{2}$$

Do đó ta có :

$$\frac{1}{6}Ml^2\omega^2{}_0 = -Mg\frac{l}{2}$$

Hay : $$\omega_0 = \frac{\sqrt{3}g}{l}$$

Ví dụ 2.4 : Các puly A và B liên kết với nhau bằng curoa (Hình 2.4) sau khi ngắt động cơ Puly A có vận tốc ω_0. Tổng trọng lượng của 2 Puly bằng P, trọng lượng của curoa bằng Q. Để hãm chúng lại người ta ép vào bánh A, bán kính R một má hãm với lực ép bé bằng $\vec{F}$, hệ số ma sát bằng f. Cho rằng ma sát ở các trục bé không đáng kể, còn các Puly là đĩa đặc đồng chất. Hãy xác định số vòng mà Puly A quay được cho tới khi nó dừng hẳn.



Hình 25

Bài giải : Đây là bài toán xác định độ dời, biết vận tốc đầu và cuối, áp dụng công thức (2.50).

$$T_1 - T_0 = \sum A^e{}_k \qquad \text{(a)}$$

Theo điều kiện bài toán thì $T_1 = 0$; $T_0 = T_A + T_B + T_C$.

(T_C là động năng của curoa). Chú ý rằng tất cả các điểm thuộc curoa có vận tốc ban đầu bằng $V_{CO} = \omega_0.R = \omega'_0.r$ Trong đó ω'_0 và r là vận tốc góc ban đầu và bán kính của Puly B. Ta có :

$$T_A = \frac{1}{2}(\frac{P_A}{2g}R^2)\omega^2{}_0; T_B = \frac{1}{2}(\frac{P_B}{2g}r^2)\omega'^2{}_0 = \frac{P_B}{4g}R^2\omega^2{}_0$$

$$T_C = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}V^2{}_{CO} = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}R^2\omega^2{}_0$$

$$T_0 = T_A + T_B + T_C = \frac{P_A}{4g}R^2\omega^2{}_0 + \frac{P_B}{4g}R^2\omega^2{}_0 + \frac{1}{2}\frac{Q}{g}R^2\omega^2{}_0 = \frac{P+2Q}{4g}R^2\omega^2{}_0$$

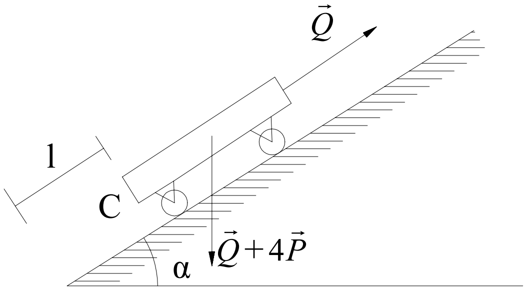
Trong chuyển động của hệ trọng lực của các vật thuộc hệ không sinh công vì điểm đặt của chúng không thay đổi. Lực ma sát $F_{ms} = f.F$ sinh công bằng :

$$A_{ms} = -(f.F.R)\varphi_1 = -f.F.R.2.\Pi N_{vq}$$

Thay các giá trị tìm được vào phương trình (a) giả ra ta có :

$$N_{vq} = \frac{(P+2Q)R\omega^2{}_0}{8\Pi gfF}$$

Ví dụ 2.5: Một xe goòng được kéo lên theo mặt phẳng nghiêng bằng lực không đổi Q = 16 kG (Hình 25). Cho biết góc nghiêng α so với mặt phẳng nằm ngang là 30^0, trọng lượng thùng xe P = 18 kG, mỗi bánh xe đặc trọng lượng P = 2 kG (có 4 bánh). Hãy xác định :



Hình 26

1) Vận tốc tịnh tiến v_1 của xe su khi đi được quãng đường l = 4m cho biết vận tốc ban đầu $v_0 = 0$.

2) Gia tốc của xe. Biết rằng các bánh đều lăn không trượt, ma sát lăn không đáng kể.

Bài giải :

1) Để xác định v_1 ta sử dụng phương trình (2.40)

$$T_1 - T_0 = \sum A^e{}_k \quad \text{(a)}$$

Trong trường hợp khảo sát, ta có : $T_0 = 0$.

$$T_1 = T_{xe} + 4T_{bánh}$$

$$T_{xe} = \frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2{}_1$$

$$T_{bánh} = \frac{1}{2}Mv^2{}_C + \frac{1}{2}J_C\omega^2 = \frac{3}{4}Mv^2{}_C = \frac{3}{4}\frac{P}{g}v^2{}_1$$

$$T_1 = \frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2{}_1 + 4\left(\frac{3}{4}\frac{P}{g}v^2{}_1\right) = \frac{1}{2g}(P+6p)v^2{}_1$$

Các lực sinh công trong trường hợp này gồm Q, P, 4p ta có :

$$A(\vec{Q}) = Q.l; A(\vec{P}) = (P+4p)h_C = -(P+4p)l\sin\alpha$$

Thay các giá trị được vào (a) và giải đối với v_1 ta được :

$$v_1 = \frac{\sqrt{2gl[Q-(P-4p)\sin\alpha]}}{P+6p} = 2{,}8m/s \quad \text{(b)}$$

2) Để xác định gia tốc ta xem v_1 = v và l trong các đẳng thức trên là hàm của thời gian t. Đẳng thức (b) có thể viết lại :

$$(P+6p).v^2{}_1 = 2gl[Q-(P-4p)\sin\alpha]$$

Đạo hàm 2 vế theo t ta được :

$$2(P+6p).v\frac{dv}{dt} = 2g\frac{dl}{dt}\left[Q-(P-4p)\sin\alpha\right]$$

Vì : $\frac{dl}{dt} = v; \frac{dv}{dt} = w$ nên cuối cùng ta được :

$$w = \frac{Q-(P+4p)\sin\alpha}{P+6p}g \approx 0.98g/m^2 .$$

CHƯƠNG III

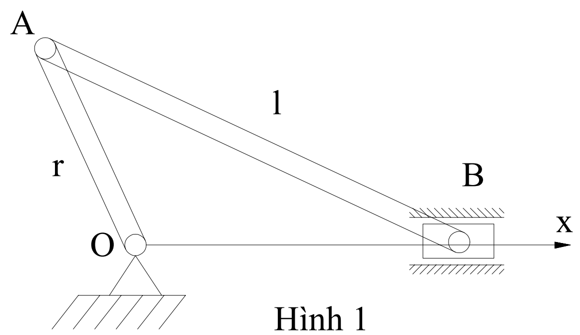
NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

§1. CÁC KHÁI NIỆM VỀ CƠ HỆ KHÔNG TỰ DO

1.1. Liên kết :

Trước đây ta đã đưa ra định nghĩa và cách xác định lực liên kết. Bây giờ ta nhắc lại và đi sâu vào tính chất của các liên kết, phương trình, phân loại liên kết.

a) Định nghĩa : Tất cả những điều kiện cản trở những chuyển động của vật khảo sát trong không gian được gọi là liên kết.



Hình 1

Ví dụ : Cơ cấu tây quay thanh truyền. Tay quay OA quay quanh trục O. Thanh truyền AB chuyển động song phẳng. Con trượt B chuyển động thẳng theo Ox.

b) Phương trình liên kết :

Liên kết thường biểu diễn bằng các hệ thức giữa vị trí và vận tốc các chất điểm của cơ hệ. Các hệ thức này gọi là phương trình liên kết được viết dưới dạng tổng quát như sau :

$$f_i(\vec{r}_k, \vec{v}_k, t) \geq 0 \qquad (3.1)$$

Với ví dụ trên ta có thể viết các phương trình liên kết của cơ cấu phẳng tay quay thanh truyền như sau :

$$x(0) = y(0) = 0.$$

$$x^2{}_A + y^2{}_A = r^2$$

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = l^2$$

$$y_B = 0$$

e) Phân loại liên kết :

Liên kết được chia thành các loại chính sau đây :

- Liên kết dừng và liên kết không dừng

Liên kết mà phương trình của nó không chứa yếu tố thời gian gọi là liên kết dừng, ngược lại có chứa t gọi là liên kết không dừng.

$f_i(\vec{r}_k, \vec{v}_k) \geq 0$ - Liên kết dừng

$f_i(\vec{r}_k, \vec{v}_k, t) \geq 0$ - Liên kết không dừng.

- Liên kết hình học và liên kết động học.

Liên kết mà phương trình liên kết của nó không chứa yếu tố vận tốc $\vec{v}_k$ hoặc nếu có ta có thể tích phân được gọi là liên kết hình học, ngược lại có chứa yếu tố vận tốc gọi là liên kết động học.

Từ nay về sau ta chỉ xét các cơ hệ chịu liên kết dừng, và hình học.

Với ví dụ trên cơ hệ chịu liên kết hình học và liên kết dừng.

1.2 Di chuyển khả dĩ và số bậc tự do :

a) Di chuyển khả dĩ :

Di chuyển khả dĩ của hệ là tập hợp tất cả những độ dời vô cùng bé của các chất điểm của hệ mà tất cả các liên kết cho phép ở tại thời điểm khảo sát.

Như vậy di chuyển khả dĩ hay còn gọi là di chuyển ảo của hệ phải thỏa mãn 2 điều kiện sau:

+ Di chuyển vô cùng bé

+ Các di chuyển thực hiện được mà không phá vỡ liên kết.

Ta kí hiệu di chuyển khả dĩ như sau :

$$\delta\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) - \vec{r}(t) \qquad (3.2)$$

b) Số bậc tự do :

Số di chuyển khả dĩ độc lập với nhau của hệ gọi là số bậc tự do của hệ.

Ta có thể tính số bậc tự do của hệ theo quy tắc sau :

$$m = 3s \text{ hoặc } m = 2n - s \qquad (3.3)$$

Với m : số bậc tự do.

n : số chất điểm

s : số phương trình liên kết

1.3 Tọa độ suy rộng :

Các tham số độc lập nếu chúng có số lượng đúng bằng số bậc tự do của hệ và xác định duy nhất được vị trí của hệ thì gọi là các tọa độ suy rộng của hệ.

Ta kí hiệu tọa độ suy rộng bằng :

$$\{q_i\} = q_1, q_2, q_3, ..., q_n \qquad (3.4)$$

Tọa dộ suy rộng có thể là đoạn thẳng, các cung, các góc, các diện tích..v..v. Không kể chúng có thứ nguyên hay có ý nghĩa hình học hoặc ý nghĩa vật lý như thế nào.

Theo định nghĩa số tọa độ suy rộng bằng số bậc tự do của hệ nên việc chọn tọa độ suy rộng gắn liền với việc xác định số bậc tự do của hệ.

Ta gọi δq_i số gia phân tố của tọa độ suy rộng, ta có thể biểu diễn các tọa độ Đề-các x_k, y_k, z_k qua tọa độ suy rộng :

$$\begin{aligned} x_k &= x_k(q_1, q_2, q_3, ..,q_m) \\ y_k &= y_k(q_1, q_2, q_3, ..,q_m) \\ z_k &= z_k(q_1, q_2, q_3, ..,q_m) \end{aligned} \qquad (3.5)$$

Hoặc $$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, ..., q_m) \qquad (3.6)$$

Bây giờ ta đi xác định di chuyển khả dĩ qua tọa độ suy rộng.

Từ (3.2) :

$$\delta\vec{r}_k(t) = \vec{r}_k{}^*(q_1^*, q_2^*, ..., q_m^*) - \vec{r}_k(q_1, q_2, ..., q_m)$$

Trong đó : $q^*_i = q_i + \delta q_i$

Vậy :

$$\delta\vec{r}_k(t) = \vec{r}_k{}^*(q_1 + \delta q_1, q_2 + +\delta q_2, ..., q_m + +\delta q_m) - \vec{r}_k(q_1, q_2, ..., q_m) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta\vec{r}_k}{\delta q_i}\delta q_i \quad (3.7)$$

Khi hệ chuyển động các tọa độ suy rộng sẽ biến đổi liên tục theo thời gian :

$$q_1 = f_1(t); q_2 = f_2(t); ....; q_n = f_n(t)$$

Các phương trình này gọi là các phương trình động học của hệ trong các tọa độ suy rộng. Đại lượng $\frac{dq_i}{dt} = q_i$ gọi là vận tốc suy rộng của hệ.

1.4 Lực suy rộng :

Xét cơ hệ gồm n chất điểm, chịu tác dụng của hệ lực $\{\vec{F}_k\}$. Cho hệ có m bậc tự do được xác định bởi tọa độ suy rộng $\{q_i\} i = 1,2,...,m$.

Ta đi biểu diễn lực và phương pháp tính lực trong tọa độ suy rộng. Để tìm đặc trưng của hệ lực tác dụng lên cơ hệ, ta xét khả năng sinh công của hệ lực.

Ta gọi δA là công khả dĩ của hệ lực $\{\vec{F}_k\}$ tác dụng lên cơ hệ là tổng công các lực trong tập hợp di chuyển khả dĩ.

$$\delta A = \sum_k \vec{F}_k \delta\vec{r}_k \qquad (3.8)$$

Trong tọa độ Đề-các (3.8) có dạng :

$$\delta A = \sum_k F_{kx}\delta r_{kx} + F_{ky}\delta r_{ky} + F_{kz}\delta r_{kz} \quad (3.9)$$

Bây giờ ta tính nó trong tọa độ suy rộng :

Thế (3.7) vào (3.8)

$$A = \sum_k \vec{F}_k \left(\sum_i \frac{\delta\vec{r}_k}{\delta q_i} \delta q_i \right) = \sum_i \left(\sum_k \vec{F}_k \frac{\delta\vec{r}_k}{\delta q_i} \right) \delta q_i$$

Đặt $Q_i = \sum_k \vec{F}_k \frac{\delta\vec{r}_k}{\delta q_i}$ (3.10). Q_i được gọi là lực suy rộng, vậy :

$$\delta A = \sum_{(i)} Q_i \delta q_i \qquad (3.11)$$

Để tính lực suy rộng Q_i nào đó ta truyền cho hệ một di chuyển khả dĩ độc lập sao cho tọa độ suy rộng q_i có số gia $\delta q_i \neq 0$, còn các tọa độ khác $\delta q_i = 0$ với $j \neq i$. Tính tổng công của các lực trên di chuyển khả dĩ. Theo (3.11) từ đây xét ra :

$$Q_i = \frac{\delta A}{\delta q_i}$$

Tương tự như vậy, ta có thể tính được các lực suy rộng : $Q_1, Q_2, ..,Q_i,...,Q_m$.

Thứ nguyên của lực suy rộng Q_i bằng thứ nguyên của công chia cho thứ nguyên của tọa độ suy rộng tương ứng.

$$[Q_i] = \frac{[\delta A]}{[\delta q_i]}$$

Giả sử : q là độ dài thì thứ nguyên là lực thông thường theo hệ SI là N.

Nếu q là góc thì Q đo bằng Nm – Thứ nguyên của mômen lực.

Nếu q là thể tích thì Q đo bằng N/m^2 – Thứ nguyên của áp suất.

Nếu các lực tác dụng lên hệ là các lực thế như ta đã biết hệ sẽ có hàm lực :

$$U = U(x_k, y_k, z_k)$$

và
$$\delta U = \sum \delta A_k = \delta A$$

Khi tính trong hệ tọa độ suy rộng thì :

$$U = U(q_1, q_2, ..., q_m)$$

Ta tính :

$$\delta U = \delta A = \frac{\partial U}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2}\delta q_2 + ... + \frac{\partial U}{\partial q_m}\delta q_m$$

So sánh (3.12) với (3.11) ta có :

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1}, Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2}, ..., Q_m = \frac{\partial U}{\partial q_m} \quad (3.13)$$

Vì thế năng π = -U nên (3.13) có thể biểu diễn lực suy rộng qua thế năng π như sau :

$$Q_1 = -\frac{\partial \pi}{\partial q_1}, Q_2 = -\frac{\partial \pi}{\partial q_2}, ..., Q_m = -\frac{\partial \pi}{\partial q_m} \quad (3.14)$$

Vậy theo lực suy rộng được tính theo (3.14) trong trường hựop các lực là lực thế.

1.5 Liên kết lý tưởng :

Ta đã gặp những loại liên kết mà tổng cộng của các lực liên kết sinh ra trên các độ dời phân tố của hệ triệt tiêu. Hay nói cách khác liên kết này không ảnh hưởng đến biến thiên động năng của hệ trong quá trình chuyển động. Ta đưa ra khái niệm cơ hệ lý tưởng. Ta có định nghĩa sau :

Các liên kết của hệ sẽ được gọi là lý tưởng nếu tổng công nguyên tố của các lực liên kết trên mọi di chuyển khả dĩ của hệ đều bằng không. Tức là :

$$\delta A(l_k) = \sum \vec{N}_k . \delta \vec{r}_k = 0 \quad (3.15)$$

Các liên kết thường gặp sau đây là liên kết lý tưởng :

- Liên kết tựa không ma sát
- Liên kết lăn không trượt trên mặt cong nhám.
- Liên kết bản lề không ma sát
- Liên kết dây mềm không giãn.
- Liên kết thanh ...v..v

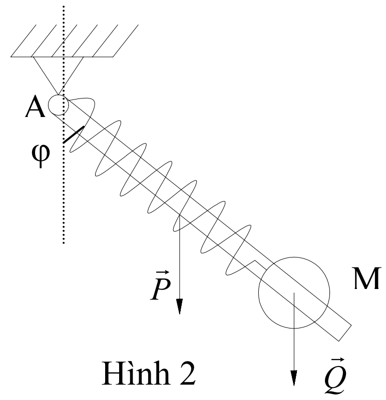
1.6 Ví dụ lực suy rộng :

Ví dụ : Hãy xác định các lực suy rộng của hệ bỏ qua lực ma sát (như hình vẽ 2), gồm thanh AB dài l trọng lượng P, có thể quay quanh trục A trên mặt phẳng thẳng đứng. Viên bi M có khối lượng Q chuyển động trên thanh. Chiều dài tự nhiên của lò xo AM = a, độ cứng là C.

Giải : Hệ có hai bậc tự do, ta chọn $q_1 = \varphi$ và $q_2 = x$. Làm 2 tọa độ suy rộng.

Ta tính Q_φ và Q_x tương ứng.

Trước hết ta đi tính Q_φ, muốn vậy ta truyền cho hệ một di chuyển khả dĩ sao cho chỉ có góc φ thay đổi, còn x = const nên δx = 0.



Hình 2

Trên di chuyển δφ này, các lực $\vec{P},\vec{Q}$ sinh công :

$$\delta A = \left[-\frac{Pl}{2}\sin\varphi - Q(a+x)\sin\varphi\right]\delta\varphi$$

Vậy : $$Q_\varphi = \frac{\delta A}{\delta\varphi} = -\left[\frac{Pl}{2} + Q(a+x)\right]\sin\varphi$$

Để tính Q_x, ta truyền cho hệ một di chuyển khả dĩ sao cho chỉ có x thay dổi với δx ≠ 0, còn φ = const.

Trên di chuyển δx này, các lực $\vec{P},\vec{Q}$ sinh công.

Trong đó : F = cx

$$\delta A = [-cx + Q\cos\varphi]\delta x$$

Vậy : $$Q_x = \frac{\delta A}{\delta x} = Q\cos\varphi - cx$$

Kết quả :

$$Q_1 = Q_\varphi = -\left[\frac{Pl}{2} + Q(a+x)\right]\sin\varphi$$

$$Q_2 = Q_x = Q\cos\varphi - cx$$

§2. NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

2.1 Nguyên lý :

Điều kiện cần và đủ để cho cơ hệ chịu liên kết lý tưởng được cân bằng là tổng công nguyên tố của tất cả các lực chủ động tác dụng lên hệ trong mọi di chuyển khả dĩ của hệ phải bằng không.

$$\sum \delta A_{F_k} = \sum \vec{F}_k \delta \vec{r}_k = 0 \qquad (3.16)$$

($\vec{F}_k$ là lực chủ động thứ k)

Chứng minh :

Điều kiện cần: Cho cơ hệ chịu lực liên kết lý tưởng được cân bằng ta chứng minh rằng (3.16) là đúng.

Thật vậy, vì hệ cân bằng nên từng chất điểm riêng biệt sẽ cân bằng. Ta xét chất điểm M_k gồm có $\vec{F}_k$ lực chủ động, $\vec{N}_k$ phản lực liên kết.

Vì nó cân bằng nên : $\vec{F}_k + \vec{N}_k = 0$

Nhân hai vế với $\delta \vec{r}_k$ ta có:

$$(\vec{F}_k + \vec{N}_k)\delta \vec{r}_k = \delta A_{F_k} + \delta A_{N_k} = 0$$

Đối với toàn hệ ta có tổng công :

$$\sum \delta A_{F_k} + \sum \delta A_{N_k} = 0$$

Vì chịu liên kết lý tưởng, nên $\sum \delta A_{N_k} = 0$.

Do đó : $\sum \delta A_{F_k} = 0$

Điều kiện đủ : Cho cơ hệ chịu liên kết lý tưởng và thỏa mãn (3.16), ta cần chứng minh cơ hệ cân bằng. Ta dùng phương pháp phản chứng, giả sử cơ hệ không cân bằng. Tức là tại thời điểm nào đó cơ hệ chuyển động theo định lý biến thiên động năng của cơ hệ, ta có :

$$dT = dA_F + dA_N > 0$$

Vì liên kết lý tưởng : $dA_N = 0$.

nên $dA_F > 0$.

Điều này trái với đẳng thức (3.16). Vậy cơ hệ cân bằng.

Nhờ nguyên lý di chuyển khả dĩ ta có thể đưa ra điều kiện cân bằng tổng quát của cơ hệ không tự do.

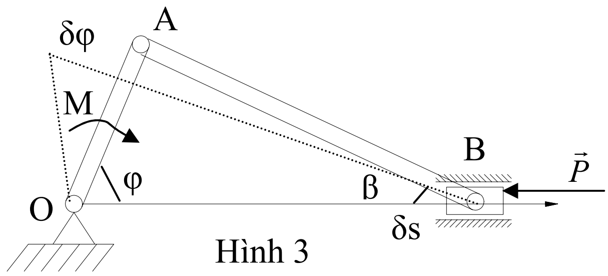
$$\delta A_F = \sum \vec{F}_k \delta \vec{r}_k = 0 \qquad (3.17)$$

Trong tọa độ Đềcác, ta có điều kiện sau :

$$\sum F_{kx}\delta r_{kx} + F_{ky}\delta r_{ky} + F_{kz}\delta r_{kz} = 0 \qquad (3.18)$$

2.2 Ví dụ :

Ví dụ 1: Tìm hệ thức giữa mômen M của ngẫu lực tác dụng lên tay quay của cơ cấu thanh truyền và áp lực P lên píttông khi cân bằng. Cho biết OA = r, AB = l (Hình vẽ 3).



Hình 3

Giải :

Cơ cấu có một bậc tự do, chọn φ làm tọa độ suy rộng. Lực $\vec{P}$, ngẫu lực M sinh công.

Cho tay quay di chuyển khả dĩ δφ, khi đó con trượt B di chuyển δs.

Theo điều kiện cân bằng ta có :

$$-M.\delta\varphi + P.\delta s = 0$$

Vì thanh truyền AB chuyển động song phẳng ta tính V_B qua ω như sau :

$$V_A.\cos\alpha = V_B.\cos\beta. \qquad (\alpha = 90 - (\varphi + \beta))$$

$$V_B = \frac{r\omega.\sin(\varphi+\beta)}{\cos\beta} = \omega.r(\sin\varphi + \cos\varphi.tg\beta)$$

Xét ΔOAB : $$\frac{\sin\beta}{r} = \frac{\sin\varphi}{l}$$

$$tg\beta = \frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}}$$

Do đó : $$V_B = \omega.r\left(1 + \frac{r\cos\varphi.}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}\right)\sin\varphi$$

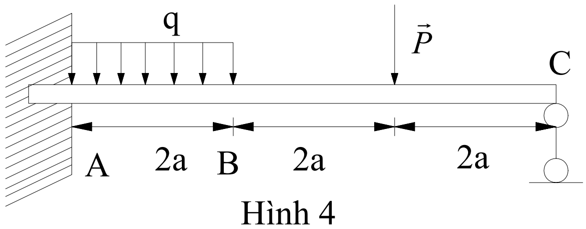
Vậy : $$M = P.r\left(1 + \frac{r\cos\varphi.}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}\right)\sin\varphi$$

Ví dụ 2: Cho hệ dầm chịu liên kết và chịu lực như hình vẽ 4. Bỏ qua ma sát, tìm phản lực ở gối C và ngàm A.

Giải :

Khảo sát hệ dầm :

- Tìm phản lực $\vec{R}_C$, giải phóng gối C, cho hệ thực hiện di chuyển khả dĩ là dầm BC, quay quanh B một góc δφ.



Hình 4

δA = 0 →

$$m_B(\vec{P}).\delta\varphi + m_B(\vec{R}_C).\delta\varphi = 0$$

$$-2a.P\delta\varphi + 4aR_C\delta\varphi = 0$$

hay : $$\left(-2a.P + 4aR_C\right)\delta\varphi = 0$$

vì δφ ≠ 0, nên $R_C = \dfrac{P}{2}$

- Tìm phản lực tại ngàm A :

Giải phóng ngàm thay bằng $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{M}_A$

Rõ ràng $X_A = 0$.

Tương tự như $\vec{R}_C$ ta tính được :

$$Y_A = Q + \frac{P}{2}$$

với Q = 2aq.

Để tính M_A ta thay ngàm bằng bản lề và ngẫu lực $\vec{M}_A$

Cho hệ di chuyển khả dĩ δφ

$$\delta A = 0 \rightarrow M_A.\delta\varphi + m_A(\vec{Q})\delta\varphi + m_C(\vec{P})\delta\varphi_1 = 0$$

Trong đó δφ và $\delta\varphi_1$ liên hệ như sau :

$$2a\delta\varphi = 4a\delta\varphi_1 \rightarrow \delta\varphi_1 = \frac{1}{2}\delta\varphi$$

Thế $\delta\varphi_1$ vào phương trình trên ta có:

$$M_A.\delta\varphi + aQ\delta\varphi + 2aP\frac{\delta\varphi}{2} = 0$$

$$\Rightarrow M_A = a(P + Q)$$

Qua các ví dụ trên ta thấy ý nghĩa của nguyên lý di chuyển khả dĩ ở chỗ nó cho ta điều kiện cân bằng của mọi cơ hệ dưới dạng tổng quát. Trong khi đó các phương pháp tĩnh học yêu cầu xét sự cân bằng của từng vật trong hệ. Khi dùng nguyên lý chỉ cần xét các lực chủ động, cho nên ngay từ đầu đã tránh được không phải xét đến phản lực liên kết chưa biết, khi chúng là các liên kết lý tưởng.

§3. ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG CỦA HỆ TRONG TỌA ĐỘ SUY RỘNG

3.1 Trường hợp chung :

Theo nguyên lý di chuyển khả dĩ từ (3.16) và (3.11) ta có :

$$\delta A = \sum_{(i)} Q_i \delta q_i = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + ... + Q_m \delta q_m = 0$$

vì $\delta q_1, \delta q_1, ... \delta q_m$ độc lập với nhau nên ta rút ra :

$$Q_1 = Q_2 = ... = Q_m \qquad (3.19)$$

Vậy điều kiện cần và đủ để cân bằng là tất cả các lực suy rộng tương ứng với các tọa độ suy rộng của hệ phải bằng không.

3.2 Trường hợp các lực có thế :

Ta xét cơ hệ chịu tác dụng của hệ lực là các lực thế.

Khi đó theo (3.14) và (3.19) ta có :

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = \frac{\partial \pi}{\partial q_2} = ... = \frac{\partial \pi}{\partial q_m} = 0 \qquad (3.20)$$

CHƯƠNG IV

NGUYÊN LÝ ĐALAMBE

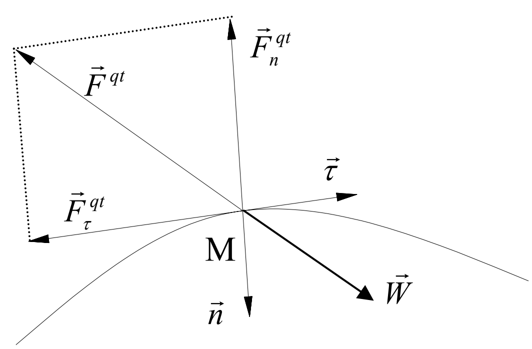
Tất cả các phương pháp giải bài toán động lực học đã trình bày trước đây đều dựa trên các phương trình được suy ra từ hệ tiên đề của động lực học hoặc từ các định lý tổng quát là các hệ quả của chúng. Bấy giờ ta có thể thiết lập các phương trình chuyển động hay điều kiện cân bằng của cơ hệ dựa trên những cơ sở khác nữa là các nguyên lý cơ học có thể thay cho tiên đề 2. Áp dụng các nguyên lý này ta có thể tìm được những phương pháp giải bài toán rất hiệu quả. Nó cho ta thấy được vai trò của các áp lực chủ động trong mối quan hệ với chuyển động của cơ hệ.

Nguyên lý Đalambe được coi là mệnh đề tương đương với tiên đề 2.

§1. KHÁI NIỆM VỀ LỰC QUÁN TÍNH HỆ QUÁN TÍNH

1.1 Định nghĩa :

Các chất điểm M có khối lượng m, chuyển động với gia tốc $\vec{W}$ dưới tác dụng của hệ lực trong hệ quy chiếu quán tính.



Hình 5

Đại lượng :

$\vec{F}^{qt} = -m\vec{W}$ (4.1)

Chiếu (4.1) lên các trục ox, oy, oz

$$\begin{cases} F_x^{qt} = -m\ddot{x} \\ F_y^{qt} = -m\ddot{y} \\ F_z^{qt} = -m\ddot{z} \end{cases} \quad (4.2)$$

Trong hệ tọa độ tự nhiên ta có :

$$\vec{F}^{qt} = \vec{F}_n^{qt} + \vec{F}_\tau^{qt}$$

Với : $\vec{F}_n^{qt} = -m\vec{W}^n$ gọi là lực quán tính pháp hay còn gọi là lực quán tính ly tâm.

$\vec{F}_\tau^{qt} = -m\vec{W}^\tau$ gọi là lực quán tính tiếp.

Từ định nghĩa ta thấy lực quán tính không phải là lực thực sự tác dụng lên chất điểm khảo sát.

1.2 Thu gọn hệ lực quán tính :

Xét cơ hệ gồm n chất điểm có khối lượng M = $\sum_{(k)} m_k$ và gia tốc của điểm tương ứng $\vec{W}_k$.

Khi đó ta thu được hệ lực quán tính :

$$\vec{F}_1^{qt}, \vec{F}_2^{qt}, ..., \vec{F}_n^{qt} \text{ hay } \{\vec{F}_k^{qt}\} \text{ với k = 1, 2,..., n}$$

Để thu gọn hệ lực quán tính này dựa vào kết quả từ tĩnh học, ta có thể thu gọn về một tâm. Ta được một lực và một ngẫu lực :

$$\{\vec{F}_k^{qt}\} \sim (\vec{R}^{qt}, \vec{M}^{qt})$$

Trong đó :

$$\vec{R}^{qt} = \sum_{(k)} \vec{F}_k^{qt}$$

$$\vec{M}_k^{qt} = \sum_{(k)} \vec{m}_0(\vec{F}_k^{qt})$$

được gọi là véctơ chính và mômen chính của hệ lực quán tính đối với tâm O.

Ta cần đi xác định véctơ chính và mômen chính của lực quán tính của vật rắn chuyển động khi nó thu gọn về khối tâm C của vật.

Đối với $\vec{R}^{qt}$ ta có :

$$\vec{R}^{qt} = \sum - m_k \vec{W}_k = -M\vec{W}_C \quad (4.4)$$

Vậy véctơ chính của lực quán tính của vật trong chuyển động bất kỳ luôn được xác định theo (4.4)

Còn $\vec{M}_C^{qt} = \sum \vec{m}_C(\vec{F}^{qt}{}_k)$ sẽ thay đổi khi vật thay đổi chuyển động. Ta xét vật chuyển động cụ thể như sau :

a) Chuyển động song phẳng :

Xét vật chuyển động song phẳng, tức là quay quanh trục Cz vuông góc với mặt phẳng chuyển động (π) với vận tốc góc là $\vec{\omega}$ và gia tốc góc là $\vec{\varepsilon}$.

Như trên : $\vec{M}_C^{qt} = -\sum (m_k \vec{r}_k \wedge \vec{W}_k)$

Trong đó : $\vec{W}_k = \vec{W}_C + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}_k + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_k)$

Theo phép biến đổi véctơ ta có :

$$\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_k) = \vec{\omega}.(\vec{\omega}.\vec{r}_k) - \omega^2.\vec{r}_k$$

vì $\vec{r}_k \perp \vec{\omega}$ nên : $\vec{r}_k.\vec{\omega} = 0$

Do đó : $$\vec{W}_k = \vec{W}_C + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}_k - \omega^2 \vec{r}_k$$

Ta thế $\vec{W}_k$ và tình :

$$m_k \vec{r}_k \wedge \vec{W}_k = m_k \left[(\vec{r}_k \wedge \vec{W}_C + \vec{r}_k \wedge (\vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}_k) - \omega^2 (\vec{r}_k \wedge \vec{r}_k) \right]$$

Vì : $\vec{r}_k \wedge \vec{r}_k = 0$, $\vec{r}_k \perp \vec{\varepsilon}$ nên :

$$m_k \vec{r}_k \wedge \vec{W}_k = m_k \vec{r}_k \wedge \vec{W}_C + m_k {r_k}^2 \vec{\varepsilon}$$

Vậy :

$$\vec{M}_C{}^{qt} = -\sum m_k \vec{r}_k \wedge \vec{W}_C - \sum m_k {r_k}^2 \vec{\varepsilon}$$

Vì : $\sum m_k \vec{r}_k = M\vec{r}_C = 0$ ta có :

$$\vec{M}_C{}^{qt} = -J_C \vec{\varepsilon}$$

Vì vật chuyển động song phẳng nên véctơ $\vec{\varepsilon}$ luôn vuông góc với mặt phẳng (π), nên ta có thể thay $\vec{\varepsilon}$ bằng $\overline{\varepsilon}$.

Do đó : $$\overline{M}_C{}^{qt} = -J_C \overline{\varepsilon} \qquad (4.5)$$

Vậy : Vật chuyển động song phẳng thì hệ lực quán tính thu về khối tâm C của vật được một lực và một ngẫu lực xác định theo (4.4) và (4.5).

Nghĩa là :

$$\vec{R}^{qt} = -M\vec{W}_C$$
$$\overline{M}^{qt}{}_C = -J_C \overline{\varepsilon}$$

c) Vật quay một quanh trục:

Cho vật quay quanh một trục Oz với vận tốc góc $\vec{\omega}$ và gia tốc góc $\vec{\varepsilon}$. Thu gọn hệ lực quán tính của vật về một điểm O. Ta thu được $\vec{R}^{qt}$ xác định theo (4.4) còn mômen chính $\vec{M}^{qt}$ được tính như sau :

$$\vec{M}_O{}^{qt} = \sum m_k \vec{r}_k \wedge \vec{W}_k$$

trong đó : $\vec{W}_k = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}_k + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_k) = (\omega^2 x_k + \varepsilon x_k)\vec{i} + (\omega^2 y_k + \varepsilon y_k)\vec{j}$ (4.6)

($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các véctơ đơn vị của các trục ox, oy, oz.)

Do đó : $\vec{M}_O{}^{qt} = (-\omega^2 J_{yz} + \bar{\varepsilon} J_{xz})\vec{i} + (\omega^2 J_{xz} - \bar{\varepsilon} J_{yz})\vec{j} + J_z \vec{\varepsilon}$

Trong đó : J_{xz}, J_{yz} mômen tích quán tính.

Chiếu lên các trục ox, oy, oz ta nhận được :

$$\begin{aligned} \overline{M}_x{}^{qt} &= J_{xz}\varepsilon - J_{yz}\omega^2 \\ \overline{M}_x{}^{qt} &= J_{xz}\omega^2 - J_{xz}\varepsilon \\ \overline{M}_x{}^{qt} &= J_z\varepsilon \end{aligned} \qquad (4.7)$$

Ta xét trường hợp đặc biệt :

- Nếu trục Oz là trục quán tính chính tức là :

$J_{xz} = J_{yz} = 0$ khi đó $\overline{M}_x{}^{qt} = \overline{M}_y{}^{qt} = 0$

Chỉ còn $\overline{M}_z{}^{qt} = -J_z\varepsilon$ và $\vec{R}^{qt} = -M\vec{W}_C$

- Nếu trục Oz là trục quán tính chính trung tâm tức là C$\in$ Oz :

Ta có : $$\vec{R}^{qt} = 0$$

$$\vec{M}_z{}^{qt} = -J_z.\vec{\varepsilon}$$

§2. NGUYÊN LÝ ĐALAMBE

2.1 Đối với chất điểm :

Tại mỗi thời điểm nếu đặt thêm vào chất điểm lực quán tính của nó ta được một hệ lực cân bằng gồm lực chủ động, lực liên kết và lực quán tính của chất điểm.

Cho lực $\vec{F}$ chủ động

$\vec{N}$ phản lực liên kết

$\vec{F}^{qt}$ lực quán tính

Theo nguyên lý ($\vec{F}, \vec{N}, \vec{F}^{qt}$) ~ 0

Hay : $$\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}^{qt} = 0$$

Thật vậy từ tiên đề 2 của động lực học ta có :

$$m\vec{W} = \vec{F} + \vec{N}$$

$$\vec{F} + \vec{N} - m\vec{W} = 0$$

Vì $$\vec{F} = -m\vec{W}$$

Nên : $$\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}^{qt} = 0$$

2.2 Đối với cơ hệ :

Tại một thời điểm, nếu đặt thê vào mỗi chất điểm của hệ các lực quán tính tương ứng thì cùng với các ngoại lực và nội lực thực sự tác dụng lên hệ. Ta sẽ được một hệ cân bằng.

Cho $\{\vec{F}_k^{\,e}\}$ ngoại lực

$\{\vec{F}_k^{\,i}\}$ nội lực

$\{\vec{F}_k^{\,qt}\}$ lực quán tính

Ta có : $(\{\vec{F}_k^{\,e}\}, \{\vec{F}_k^{\,i}\}, \{\vec{F}_k^{\,qt}\}) \sim 0$

Khi đó : $$\begin{cases} \vec{R} = 0 \\ \vec{M}_O = 0 \end{cases} \qquad (4.9)$$

Nguyên lý Đalambe cho phép chúng ta giải các bài toán động lực chọ bằng cách thiết lập các phương trình chuyển động của hệ dạng các phương trình cân bằng quen thuộc. Đó chính là nội dung của phương pháp tĩnh động lực học.

§3. ÁP DỤNG

3.1 Phương pháp tĩnh động lực học :

Từ nguyên lý Đalambe ta thiết lập các phương trình cân bằng dựa vào kết quả cỉa tĩnh học.

a) Đối với chất điểm :

$$\vec{R} = 0 \Rightarrow R_x = F_x + N_x + F^{qt}{}_x = 0$$

b) Đối với hệ :

Ta phân lực thành nội lực và ngọai lực $\vec{R}^i, \vec{R}^e$

Trong đó : $\vec{R}^i = \sum \vec{F}_k{}^i = 0$

và $\vec{M}_O{}^i = \sum \vec{m}_O(\vec{F}^i{}_k) = 0$

Theo nguyên lý ta có :

$$\vec{R}^e + \vec{R}^{qt} = 0$$
$$\vec{M}_O{}^e + \vec{M}_O{}^{qt} = 0$$

Chiếu lên các trục tọa độ ta thu nhận :

$$\begin{aligned} R_x{}^e + R_x{}^{qt} &= 0 \\ R_y{}^e + R_y{}^{qt} &= 0 \\ R_z{}^e + R_z{}^{qt} &= 0 \\ M_x{}^e + M_x{}^{qt} &= 0 \\ M_y{}^e + M_y{}^{qt} &= 0 \\ M_z{}^e + M_z{}^{qt} &= 0 \end{aligned} \qquad (4.11)$$

Phương pháp tĩnh học thường dùng để tính các phản lực động.

3.2 Phản lực trục quay và khái niệm cân bằng trục quay :

a) Phản lực động của trục quay:

Cho vật (S) dưới tác dụng của các ngoại lực $\{\vec{F}_k{}^{(p)}\}$ quay quanh trục Oz với vận tốc góc $\vec{\omega}$ và gia tốc góc c.

Ta cần xác định phản lực tại các ổ trục tác dụng lên trục.

Các phản lực xuất hiện khi vật quay với $\vec{\omega} \neq 0$, ta gọi các phản lực này là phản lực động. Còn nếu $\vec{\omega} = 0$, theo trước đây ta gọi chúng là phản lực tĩnh.

Giải phóng liên kết tại A, B thay bằng :

$$\vec{R}_A \sim (\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A) \text{ và } \vec{R}_B \sim (\vec{X}_B, \vec{Y}_B)$$

Theo nguyên lý Đalambe ta có :

$$(\{\vec{F}_k{}^{(p)}\}, \vec{R}_A, \vec{R}_B, \{\vec{F}_k{}^{qt}\}) \sim 0$$

Trong đó : $\{\vec{F}_k{}^{qt}\} \sim (\vec{R}^{qt}, \vec{M}^{qt})$

Thu gọn về tâm O trên trục quay $\vec{R}^{qt} = -M\vec{W}_C$

Trong đó $\vec{W}_C$ được tính theo công thức (4.6). Còn $\vec{M}^{qt}$ chiếu lên các trục tọa độ được tính theo công thức (4.7)

Ta thiết lập phương trình cân bằng :

$$\begin{gathered}
R_x^{\ e} + X_A + X_B + M_{xC}\omega^2 + M_{yC}\bar{\varepsilon} = 0 \\
R_y^{\ e} + Y_A + Y_B + M_{yC}\omega^2 - M_{xC}\bar{\varepsilon} = 0 \\
R_z^{\ e} + Z = 0 \\
M_x^{\ e} + X_A a - Y_B b + J_{yz}\omega^2 + J_{xz}\bar{\varepsilon} = 0 \\
M_y^{\ e} + X_A a - X_B b + J_{xz}\omega^2 + J_{yz}\bar{\varepsilon} = 0 \\
M_z^{\ e} - J_z\bar{\varepsilon} = 0
\end{gathered} \qquad (4.12)$$

Phương trình cuối cùng của (4.12) chính là phương trình vi phân chuyển động của vật quay. Còn các phương trình còn lại xác định các phản lực $\vec{R}_A, \vec{R}_B$.

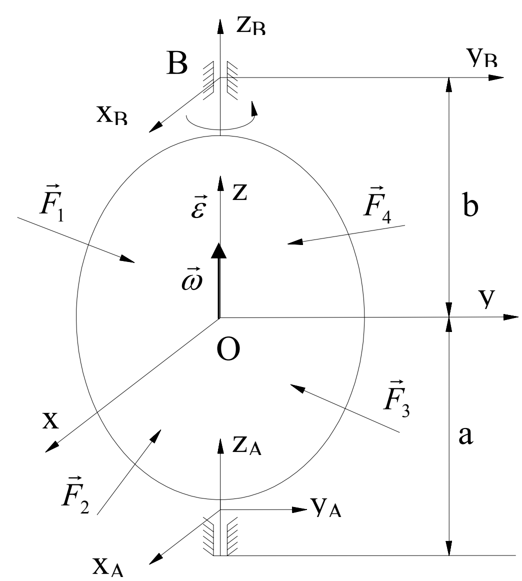
b) Cân bằng của trục quay :

Từ những phương trình (4.12) ta thấy các giá trị ω và ε của phản lực động không những phụ thuộc vào giá trị mà còn phụ thuộc vào các đại lượng X_C, Y_C, J_{xz} , J_{yz} đặc trưng cho sự phân bố khối lượng của vật đối với trục quay Oz.

Ta thấy chuyển động quay không ảnh hưởng đến giá trị của phản lực ở các ổ trục quay nếu :

$X_C = 0$ và $Y_C = 0$ (4.13)

$J_{xz} = J_{yz} = 0$ (4.14)



Hình 6

Điều kiện (4.13) và (4.14) chính là điều kiện cân bằng động của các khối lượng các vật quay quanh trục Oz. Điều kiện (4.13) chứng tỏ khối tâm C nằm trên trục quay. Còn (4.14), trục quay Oz là trục quán tính chính trung tâm của vật.

Vậy : Phản lực động tác dụng lên trục của vật quay sẽ bằng phản lực tĩnh nếu trục quay là một trong những trục quán tính chính trung tâm của vật.

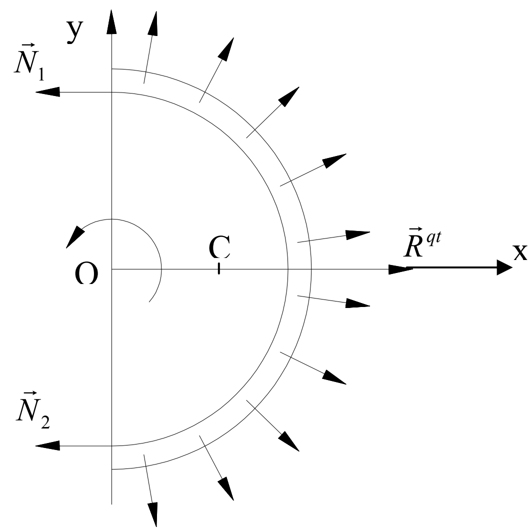
Từ đây nó cho ta ý nghĩa của các đại lượng J_{xz} và J_{yz} là đặc trưng cho mức độ mất cân bằng động của các khối lượng của vật khi nó quay quanh trục Oz. Phương pháp cân bằng các khối lượng như vậy được sử dụng rộng rãi trong kỹ thuật để cân bằng các trục khuỷu, các tay quay, các bộ truyền ..v..v.

3.3 Các ví dụ :

a) Ví dụ 1: Một vôlăng trọng lượng P quay quanh một trục có định Oz vuông góc với mặt phẳng của nó với vận tốc không đổi. Coi vôlăng là một vòng tròn đồng chất bán kính r. Bỏ qua khối lượng của các nan hoa và tác dụng của trọng lượng, hãy xác định lực có khuynh hướng phá vỡ vôlăng (Hình 7).

Giải : Đối với vôlăng, lực cần phải tìm là nội lực. Để xác định nó ta cắt vôlăng ra làm hai phần bỏ đi phần phía trái và giữ lại phần bên phải. Thay vào bằng các lực $\vec{N}_1, \vec{N}_2$. Xác định lực quán tính, vì vôlăng quay đều nên ε = 0 do đó chỉ có lực quán tính pháp, do tính chất đối xứng nên các lực quán tính có hợp lực đặt tại khối tâm C nằm trên trục Ox và có độ lớn bằng :

$$R^{qt} = MW_C = Mx_C\omega^2$$



Hình 7

Trong đó :

$$M = \frac{1}{2}\frac{P}{g}, x_C = \frac{2r}{\pi}$$

Do đó : $$R^{qt} = \frac{\Pr\omega^2}{\pi.g}$$

Theo nguyên lý Đalămbe ta có : $\left(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{R}^{qt}\right) \sim 0$

Chiếu lên trục Ox :

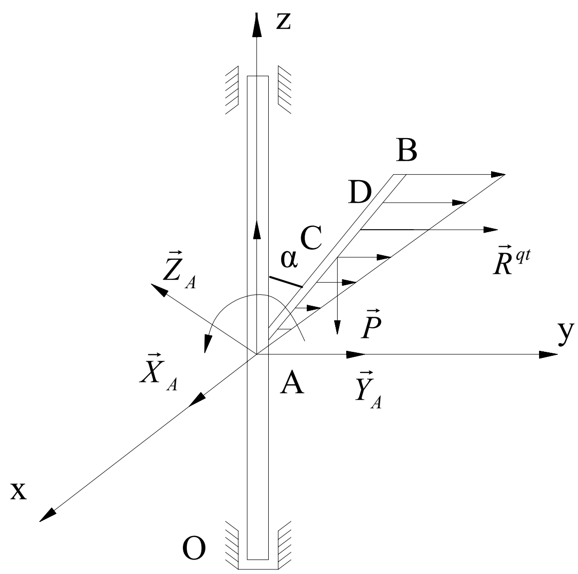
$$- N_1 - N_2 + R^{qt} = 0$$

Do tính đối xứng : $N_1 = N_2 = N$.

Vậy : $$N = \frac{R^{qt}}{2} = \frac{PR\omega^2}{2\pi.g}$$

Ví dụ 2 :

Một thanh đồng chất AB trọng lượng P dài l, được ghép chặt vào trục thẳng đứng OO_1 dưới góc α, Trục CO_1 cùng với thanh AB quay với vận tốc góc không đổi ω. Hãy xác định phản lực tại ngàm (Hình 8).



Hình 8

Giải :

Khảo sát chuyển động của thanh AB. Hệ lực tác dụng : $\vec{P}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{M}_A$.

Ta đi xác định lực quán tính các phần tử của thanh AB.

Vì ω = const nên chỉ có thành phần $\vec{F}_{kn}^{qt}$ hướng theo bán kính $\vec{r}_k$ có độ lớn bằng:

$$F_{kn}^{qt} = m_k W_{kn} = m_k r_k \omega^2$$

Đây là hệ lực song song phân bố theo quy luật tam giác.

Thu gọn hệ lực này được hợp lực đi qua điểm D cách A một đoạn bằng 2/3l có độ lớn bằng :

$$R^{qt} = MW_C = \frac{P}{g} r_C \omega^2 = \frac{P}{g}\frac{l}{2}\sin\alpha.\omega^2$$

Theo nguyên lý Đalămbe ta có :

$$\left(\vec{P}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{M}_A, \vec{R}^{qt}\right) \sim 0$$

Thiết lập phương trình cân bằng (Hình 8)

$$R_x = X_A = 0$$
$$R_y = Y_A + R^{qt} = 0$$
$$R_z = Z_A - P = 0$$
$$M_x = -P\frac{l}{2}\sin\alpha + M_{Ax} - R^{qt}\frac{2}{3}l\cos\alpha = 0$$
$$M_y = M_{Ay} = 0$$
$$M_z = M_{Az} = 0$$

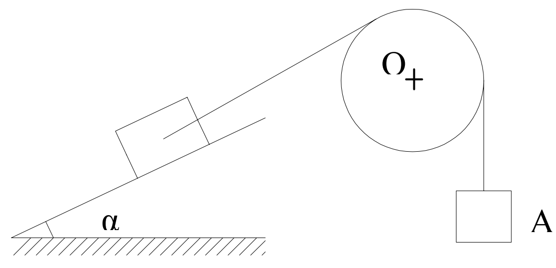
Từ đây ta tìm được :

$$X_A = 0, Y_A = -\frac{Pl\omega^2}{2g}\sin\alpha, Z_A = P$$

$$M_{Ax} = \frac{Pl}{2}(\sin\alpha + \frac{l\omega^2}{3g}\sin 2\alpha); M_{Ay} = M_{Az} = 0$$

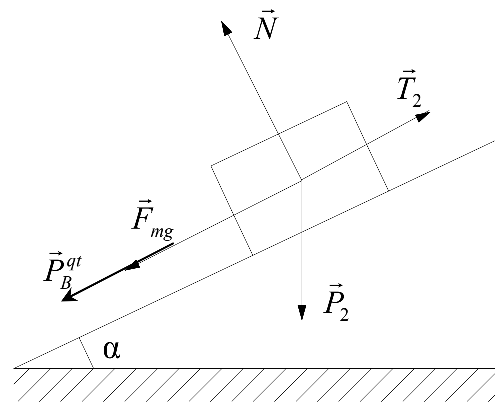
Ví dụ 3:

Vật A và B nối nhau bằng một sợi dây không giãn mắc qua ròng rọc D. Khi thả vật A trọng lượng P_1 ròng rọc D trọng lượng P_3 quay quanh trục cố định O, còn vật B trọng lượng P_2 trượt lên trên mặt phẳng nghiêng α.



Hình 9

Hãy xác định gia tốc của vật A và B và sức căng của hai nhánh dây. Cho hệ số ma sát trượt là f. Ròng rọc coi như đĩa tròn đồng chất. (hình 9).



Giải :

Hệ khảo sát gồm ba vật A, B và ròng rọc D.

- Xét vật A : Ta tách vật A theo nguyên lý Đalambe ta có: $\left(\vec{P}_1, \vec{T}_1, \vec{F}^{qt}{}_A\right) \sim 0$.

Trong đó : $$F_A{}^{qt} = \frac{P}{g}W_A$$

Chiếu lên phương X :

$$P_1 - T_1 - \frac{P_1}{g}W_A = 0\,(1)$$

Xét vật B tương tự ta có :

$$\left(\vec{P}_2, \vec{T}_2, \vec{N}, \vec{F}_B{}^{qt}, \vec{F}_{ms}\right) \sim 0$$

Trong đó :

$$F_{ms} = f.N = f.P_2.\cos\alpha$$

Chiếu lên phương Y :

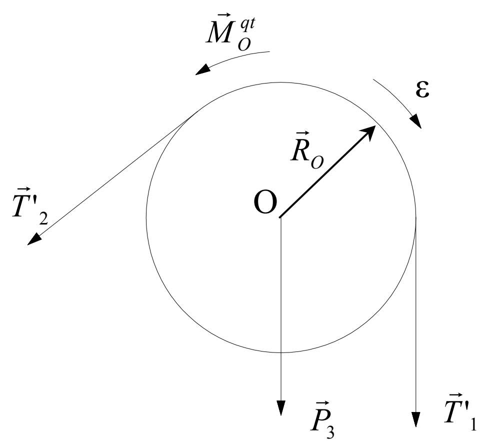
$$T_2 - F_{ms} - F_B^{qt} - P_2\sin\alpha = 0$$

hay : $$T_2 - f.P_2\cos\alpha - \frac{P}{2}W_B - P_2\sin\alpha = 0 \qquad (2)$$

- Xét ròng rọc D : $\left(\vec{P}_3, \vec{T}'_1, \vec{T}'_2, \vec{R}_0, \vec{M}_B^{qt}\right) \sim 0$

Trong đó : $M_O^{qt} = J_O.\varepsilon$

$$J_O = \frac{P_3}{2g}r^2$$



còn $$\varepsilon = \frac{W_A}{r}$$

Nên :

$$M^{qt} = \frac{P_3}{2g}rW_A$$

$$\overline{M}_O = 0 \Rightarrow T'_2 r + \frac{P_3}{2g}rW_A - T'_1 r = 0$$

hay : $$T'_2 + \frac{P_3}{2g}W_A - T'_1 = 0 \quad (3)$$

vì $T'_1 = T_1$, $T'_2 = T_2$ và $W_B = W_A$

Nên các đẳng thức (1), (2), (3) có thể viết như sau :

$$P_1 - T_1 - \frac{P_1}{g}W_A = 0$$

$$T_2 - f.P_2\cos\alpha - \frac{P}{2}W_B - P_2\sin\alpha = 0 \qquad (4)$$

$$T'_2 + \frac{P_3}{2g}W_A - T'_1 = 0$$

Từ (4) giải ra ta tìm được :

$$W_A = W_B = 2g\frac{P_1 - P_2(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{2P_1 + 2P_2 + P_3}$$

$$T_1 = \frac{2P_1P_2(1+\sin\alpha + f\cos\alpha)}{2P_1 + 2P_2 + P_3}$$

$$T_2 = \frac{2P_1P_2(1+\sin\alpha + f\cos\alpha) - P_3\left[P_1 - P_2(\sin\alpha + f\cos\alpha)\right]}{2P_1 + 2P_2 + P_3}$$

Để vật A rơi xuống phải thỏa mãn điều kiện :

$$P_1 > P_2(\sin\alpha + f\cos\alpha)$$

CHƯƠNG V

NGUYÊN LÝ ĐALAMBE – LAGƠRĂNG

§1. NGUYÊN LÝ ĐALAMBE – LAGƠRĂNG

1.1 Nguyên lý :

Kết hợp hai nguyên lý : Di chuyển khả dĩ và nguyên ý Đalambe. Ta có thể phát biểu như sau :

Tại mỗi thời điểm cơ hệ chịu liên kết hình học lý tưởng là tổng công của các lực chủ động và các phản lực quán tính trong mọi di chuyển khả dĩ bằng không.

$$\delta A(ch) + \delta A(qt) = 0 \qquad (5.1)$$

trong đó : $\delta A(ch) = \sum_{(k)} \vec{F}_k^{(ch)} \delta\vec{r}_k$

$$\delta A(qt) = \sum_{(k)} \vec{F}_k^{(qt)} \delta\vec{r}_k$$

với $\vec{F}_k^{(qt)} = -m_k \vec{W}_k$

1.2 Phương trình tổng quát của động lực học :

Từ nguyên lý trên ta rút ra phương trình tổng quát của động lực học dưới dạng :

- Véctơ : $\sum_{(k)} (\vec{F}_k^{(ch)} - m_k \vec{W}_k)\delta\vec{r}_k = 0 \qquad (5.2)$

- Tọa độ Đềcác :

$$\sum_{(k)} (F_{kx} - m_k \ddot{x}_k)\delta x_k + (F_{ky} - m_k \ddot{y}_k)\delta y_k + (F_{kz} - m_k \ddot{z}_k)\delta z_k = 0 \qquad (5.3)$$

1.3 Ví dụ :

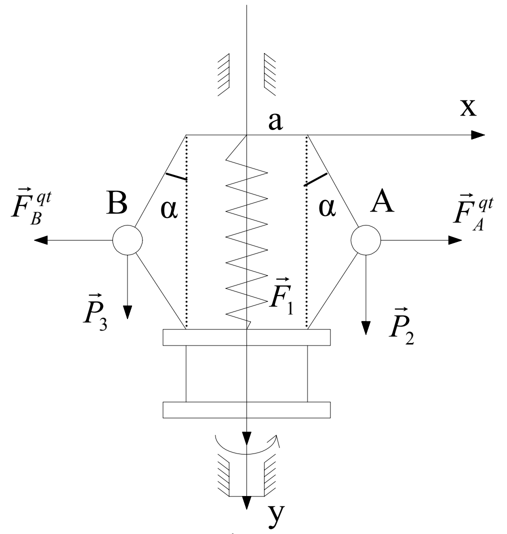
Cho cơ cấu điều tiết ly tâm như hình 10. Trục máy quay đều với vận tốc góc ω và không cân bằng tương đối. Tìm liên hệ giữa vận tốc góc của trục máy với góc nghiêng α của thanh treo với phương thẳng đứng, khi không cân bằng tương đối trên mặt phẳng của nó. Cho biết độ cứng lò xo là C và khi α = 0 thì lò xo không biến dạng, trọng lượng của đối trọng là $P_1 = P$ và của mỗi quả văng là $P_2 = P_3 = Q$, chiều dài của mỗi thanh treo là l, bản lề nối các thanh vào trục quay và vào đối trọng đều cách trục qua là a.

Bỏ qua khối lượng của các thanh, của lò xo, bỏ qua ma sát.

Giải:

Chọn cơ cấu làm hệ khảo sát :

Ta xét cơ cấu ở trạng thái cân bằng tương đối trong mặt phẳng của nó. Khi đó hệ có một bậc tự do. Chọn q = α làm tạo độ suy rộng. Hệ chịu liên kết lý tưởng vì bỏ qua ma sát. Lực chủ động gồm : $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{F}$.



Hình 10

Theo phương trình tổng quát của động lực học ta có :

$$\delta A(ch) + \delta A(qt) = 0$$

Lực quán tính :

$$F_A{}^{qt} = \frac{P_2}{g}(a + l\sin\alpha)\omega^2$$
$$F_B{}^{qt} = \frac{P_3}{g}(a + l\sin\alpha)\omega^2$$

Để tính toán ta dùng hệ trục tọa độ Đềcác XY :

$$\vec{P}_1\begin{cases} X_1 = 0 \\ Y_1 = P \end{cases}, \quad \vec{P}_2\begin{cases} X_2 = 0 \\ Y_2 = Q \end{cases}, \quad \vec{P}_3\begin{cases} X_3 = 0 \\ Y_3 = Q \end{cases}$$

$$\vec{F}_1\begin{cases} X = 0 \\ Y = F = 2Cl(1 - \cos\alpha) \end{cases}$$

$$\vec{F}_A{}^{qt} = -\vec{F}_B{}^{qt}\begin{cases} X = \dfrac{Q}{g}(a + l\sin\alpha)\omega^2 \\ Y = 0 \end{cases}$$

$$P\delta Y_C + P_2\delta Y_A + P_3\delta Y_B + F_{Ax}{}^{qt}\delta X_A + F_{Bx}{}^{qt}\delta X_B + F_y{}^{qt}\delta Y_C = 0$$

với $X_A = - X_B = l\sin\alpha$

$Y_A = Y_B = l\cos\alpha$

$X_C = 0$

$Y_C = 2l\cos\alpha$

Do đó :

$$\left[-2Pl\sin\alpha - 2Ql\sin\alpha + \frac{2Q}{g}(a + l\sin\alpha)\cos\alpha\omega^2 - 4Cl(1 - \cos\alpha)\sin\alpha\right]\delta\alpha = 0$$

Rút ra : $$\omega^2 = \frac{P + Q + 2Cl(1-\cos\alpha)}{Q(a + l\sin\alpha)} g.tg\alpha$$

§2. PHƯƠNG TRÌNH LAGƠRĂNG LOẠI II

2.1 Trường hợp chung :

Từ nguyên lý Đalambe-Lagơrăng ta có thể đưa phương trình tổng quát của động lực học đối với cơ hệ không tự do dưới dạng tọa độ Đềcác. Để mô tả nguyên lý này trong tọa độ suy rộng, ta thiết lập phương trình Lagơrăng loại II như sau :

Cho cơ hệ liên kết lý tưởng hình học có n chất điểm có m bậc tự do, tương ứng m tọa độ suy rộng $q_1, q_2, ..., q_m$ dưới dạng tác dụng của hệ lực $\{\vec{F}_k\}$ từ (3.11) ta có :

$$\delta A(ch) = \sum_{(i)} Q_i \delta q_i, i = \overline{1, m}$$

Còn lực quán tính :

$$\delta A(qt) = \sum_{(k)} - m_k \vec{W}_k \delta \vec{r}_k$$

Thay $\delta\vec{r}_k$ từ (3.7) :

$$\delta A(qt) = \sum_{(i)} \left[\sum_{(k)} - m_k \vec{W}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \right] \delta q_i = \sum_{(i)} Q_i^{qt} \delta q_i$$

Với : $$Q_i^{qt} = \sum_{(k)} - m_k \vec{W}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \qquad (5.4)$$

Q_i^{qt} gọi là lực quán tính suy rộng.

Theo nguyên tắc Đalambe-Lagơrăng ta có :

$$\sum_{(i)} (Q_i + Q_i^{qt}) \delta q_i = 0$$

Suy ra : $$Q_i + Q_i^{qt} = 0, i = 1,2,..,m \qquad (5.5)$$

Phương trình (5.5) là phương trình tổng quát của động lực học viết dưới dạng tọa độ suy rộng. Trong đó lực suy rộng quán tính chưa tính được. Ta cần biến đổi nó qua động năng của hệ.

Từ giải tích véctơ ta có :

$$m_k \vec{W} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} = m_k \frac{d}{dt} (\vec{V}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}) - m_k \vec{V}_k . \frac{d}{dt} (\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}) \qquad (5.6)$$

Trong (5.6) cần xác định $\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}$ và $\frac{d}{dt}(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i})$

- Tính $\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}$:

Từ $\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1)$ suy ra :

$$\vec{r}_k = \vec{V}_k = \sum_{(i)} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} q_i \qquad (5.7)$$

Lấy đạo hàm hai vế (5.7) theo q_i ta nhận được :

$$\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{V}_k}{\partial q_i} \qquad (5.8)$$

- Tính $\frac{d}{dt}(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i})$:

Từ (5.7) ta lấy đạo hàm theo q_i ta có :

$$\frac{\partial \vec{V}_k}{\partial q_i} = \sum_{(j)} \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_i \partial q_j} q_j \qquad (5.9)$$

Mặt khác : $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}\right) = \sum_{(j)} \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_i \partial q_j} q_j \qquad (5.10)$$

So sánh (5.9) và (5.10) suy ra :

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}) = \frac{\partial \vec{V}_k}{\partial q_i} \qquad (5.11)$$

Thế (5.8) và (5.11) vào (5.6), từ (5.4) suy ra :

$$Q_i^{qt} = -\sum_{(k)} m_k \frac{d}{dt}(\vec{V}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}) - \sum_{(k)} m_k \vec{V}_k . \frac{d}{dt}(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}) + \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial q_i}\sum_{(k)} \frac{m_k V_k{}^2}{2} + \frac{\partial}{\partial q_i}\sum_{(k)} \frac{m_k V_k{}^2}{2}$$

vì $\sum_{(k)} \frac{m_k V_k{}^2}{2}$ = T là động năng của hệ, do đó :

$$Q_i^{qt} = \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial q_i})$$

Thế (5.12) và (5.5) ta nhận được phương trình Lagorăng loại II:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial q_i}) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, i = 1,2,..,m \qquad (5.13)$$

2.2. Trường hợp các lực có thế :

Ví các lực có thế nên ta có thể tính lực suy rộng qua thế năng $\pi = \pi(q_i)$ theo (3.14) :

$$Q_i = -\frac{\partial \pi}{\partial q_i} \text{ vì } \frac{\partial \pi}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Nên phương trình (5.13) có thể viết :

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \pi}{\partial \dot{q}_i}) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \pi}{\partial q_i} = 0, i = 1...m$$

Ta đưa hàm Lagorăng : L = T – π. Khi đó phương trình Lagorăng loại II trong trường hợp các lực có thế có dạng sau :

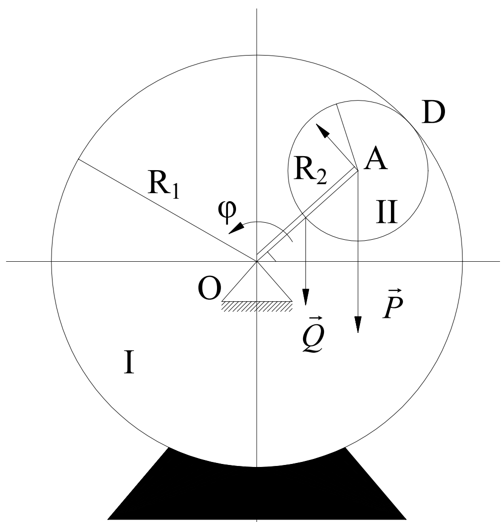
$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial q_i}) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, i = 1...m \qquad (5.4)$$

Các phương trình Lagorăng cho ta một phương pháp nhất quán và khá đơn giản để giải các bài toán động lực học, ưu điểm chính là nó không phụ thuộc vào số lượng các vật trong hệ, nó chỉ phụ thuộc vào số lượng các vật trong hệ, nó chỉ phụ thuộc vào số bậc tự do của hệ. Ngoài ra nếu các liên kết lý tưởng thì nó có các lực suy rộng chủ động tham gia trong các phương trình, cho nên các phương trình này cho phép loại bỏ trước tất cả các phản lực liên kết chưa biết.

2.3 Ví dụ :

Ví dụ : Cho cơ cấu gồm bánh xe cố định I, bán kính R_1, bánh xe chủ động II, bán kính R_2, trọng lượng P. Tay quay OA trọng lượng Q, chịu tác dụng một ngẫu lực với mômen không đổi M.

Hãy xác định gia tốc góc tay quay OA, cho biết cơ cấu đặt trong mặt phẳng thẳng đứng. Bánh xe II lăn không trượt trên bánh xe I. Bỏ qua ma sát, các bánh xe là đĩa đồng chất, thanh OA là thanh đồng chất. (Hình 11).



Hình 11

Giải :

Cơ cấu có 1 bậc tự do. Chọn q = φ là tọa độ suy rộng, khi đó phương trình Lagơrăng :

- Tính động năng của hệ :

$$T = T_{OA} + T_{bxII}$$

$$T_{OA} = \frac{1}{2}J_O\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{6}\frac{P}{g}V_A{}^2 + \frac{1}{2}J_A\omega_{II}{}^2$$

Ta tính $\vec{V}_A$ và ω_{II} theo φ :

Vì bánh xe chuyển động song phẳng nên D là tâm vận tốc tức thời :

$\omega_{II} = \frac{V_A}{D_A}$ mà $V_A = OA\dot{\varphi}$

$OA = R_1 - R_2$, $AD = R_2$ nên :

$$T_{bxII} = \frac{1}{2}\frac{P}{g}(R_1 - R_2)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4}\frac{P}{g}R_2{}^2.\frac{(R_1 - R_2)^2\dot{\varphi}^2}{R_2{}^2} = \frac{3}{4}\frac{P}{g}(R_1 - R_2)^2\dot{\varphi}^2$$

Vậy động năng của hệ :

$$T_{bxII} = \frac{2Q + 9P}{12g}(R_1 - R_2)^2\dot{\varphi}^2$$

Tính lực suy rộng Q_φ :

Các lực sinh công M, P, Q cho cơ hệ thực hiện di chuyển khả dĩ δφ :

$$\delta A = M\delta\varphi - \frac{Q(R_1 - R_2)}{2}\cos\varphi\delta\varphi - P(R_1 - R_2)\cos\varphi\delta\varphi + \frac{1}{2}\{2M - (Q + 2P)(R_1 - R_2)\cos\varphi\delta\varphi\}$$

Suy ra : $Q_\varphi = \frac{1}{2}\{2M - (Q + 2P)(R_1 - R_2)\cos\varphi\}$

- Tính $\frac{\partial T}{\partial \varphi}$ và $\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0\,;\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{2Q + 9P}{6g}(R_1 - R_2)^2\dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}) = \frac{2Q + 9P}{6g}(R_1 - R_2)^2\ddot{\varphi}$$

Thế vào phương trình Lagơrăng loại II ta nhận được :

$$\frac{2Q + 9P}{6g}(R_1 - R_2)^2\ddot{\varphi} = \frac{1}{2}\{2M - (Q + 2P)(R_1 - R_2)\cos\varphi\}$$

Vậy : $$\varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{\left[2M - (Q+2P)(R_1 - R_2)\cos\varphi\right]}{(2Q+9P)(R_1 - R_2)^2}$$

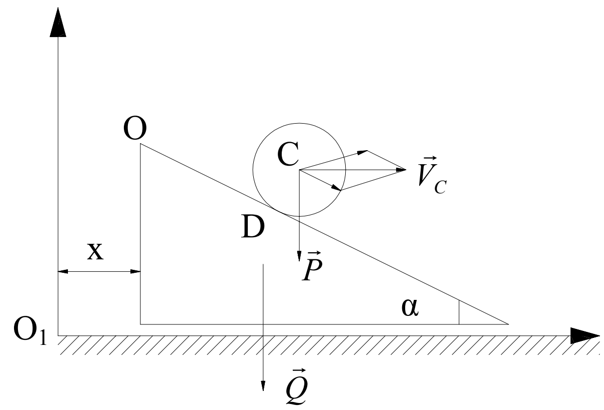
Từ đây ta nhận thấy :

ε > 0 tức là M > $\frac{1}{2}(Q+2P)(R_1 - R_2)\cos\varphi$ quay nhanh dần.

ε = 0 tức là M = $\frac{1}{2}(Q+2P)(R_1 - R_2)\cos\varphi$ quay đều.

ε < 0 tức là M < $\frac{1}{2}(Q+2P)(R_1 - R_2)\cos\varphi$ quay chậm dần.

Ví dụ 2: Một trụ đồng chất có khối lượng m, chuyển động lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng của một lăng trụ tam giác A, có khối lượng M, góc nghiêng là α. Lăng trụ có thể trượt trên mặt phẳng ngang, nhẵn. Tìm gia tốc khối tâm A của trụ đối với lăng trụ và gia tốc của lăng trụ. Bỏ qua ma sát (Hình 12).



Hình 12

Giải : Hệ khảo sát hình trụ tròn C, lăng trụ tam giác A. Hệ có hai bậc tự do, chọn $q_1 = x$, $q_2 = s$.

Vì lúc lực tác dụng lên hệ là lực thế : $\vec{P},\vec{Q}$ nên ta dùng phương trình Lagorăng loại II dạng :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial L}{\partial s} = 0 \qquad (2)$$

- Tính thế năng π của hệ :

π = - mgY_C +const, trong đo Y_C = s.sinα. nên : π = -mgs.sinα + const.

- Tính động năng T của hệ : T = $T_A + T_C$.

trong đó : $T_A = \frac{1}{2}M\dot{X}^2$

vì trục C chuyển động song phẳng nên :

$$T_C = \frac{1}{2}mV_C{}^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2{}_{tru}$$

$$\vec{V}_C = \vec{V}_r + \vec{V}_e \Rightarrow V_{Cx} = \dot{x} + \dot{s}\cos\alpha, V_{Cy} = -\dot{s}\sin\alpha$$

$$\omega_{tru} = \frac{V_r}{R} = \frac{\dot{s}}{R}; J_C = \frac{1}{2}mR^2$$

Do đó : $T_C = \frac{1}{2}m\left[(\dot{X} + \dot{s}\cos\alpha)^2 + \dot{s}^2\sin^2\alpha\right] + \frac{1}{4}m\dot{s}^2$

Vậy động năng của hệ là :

$$T = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left[2\dot{x}\dot{s}\cos\alpha + \dot{s}^2\right] + \frac{1}{4}m\dot{s}^2$$

Hàm Lagorăng L = T- π của hệ là :

$$L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{3}{4}m\dot{s}^2 + m\dot{x}\dot{s}\cos\alpha - ms\sin\alpha + const$$

Ta tính : $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}; \frac{\partial L}{\partial x}; \frac{\partial L}{\partial \dot{s}}; \frac{\partial L}{\partial s}$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + m\dot{s}\cos\alpha$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\ddot{x} + m\ddot{s}\cos\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0; \frac{\partial L}{\partial s} = -mg\sin\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = \frac{3m\dot{s}}{2} + m\dot{x}\cos\alpha$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) = \frac{3m}{2}\ddot{s} + m\ddot{x}\cos\alpha$$

Thay các biểu thức này vào phương trình (1) và (2) ta nhận được :

$$(M+m)\ddot{x} + m\ddot{s}\cos\alpha = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{3m}{2}\ddot{s} + m\ddot{x}\cos\alpha + mg\sin\alpha = 0 \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) dễ dàng tìm được :

$$\ddot{x} = \frac{mg\sin 2\alpha}{3(M+m) - 2m\cos^2\alpha}$$

$$\ddot{s} = \frac{2(M+m)g\sin\alpha}{3(M+m) - 2m\cos^2\alpha}$$

Vậy hệ chuyển động biến đổi đều. Nếu ban đầu hệ đứng yên thì khối trụ lăn xuống, còn lăng trụ sẽ trượt qua trái.

LÝ THUYẾT VA CHẠM

Mọi quá trình chuyển động của vật thể không phải bao giờ cũng diễn ra một cách đều đặn, mà có thể xảy ra sự biến đổi đột ngột. Vì vậy, khi nghiên cứu ta cần chú ý đến các đặc điểm, các hiện tượng đặc biệt của chuyển động. Ở chương này ta sẽ nghiên cứu một loại chuyển động đặc biệt đó là sự vật chạm. Va chạm là một bài toán ta thường gặp trong thực tế và kỹ thuật. Trước khi nghiên cứu hiện tượng này ta cần nắm vững các đặc điểm và các giả thuyết sau đây :

§1. CÁC ĐẶC ĐIỂM VÀ GIẢ THUYẾT VỀ VA CHẠM

1. Va chạm : Là quá trình động lực trong đó vận tốc chuyển động cảu cơ hệ thay đổi đột ngột trong khoảng thời gian vô cùng bé. Thời gian va chạm của hai vật thường xảy ra khoảng từ 10^{-2} đến 10^{-4} giây.

Ví dụ về va chạm như khi búa đóng đinh, đóng cọc, quả bóng đá vào tường lại bật ra ngay.

2. Các giai đoạn va chạm :

Quan sát hiện tượng, ta thấy các vật khi va chạm bị biến dạng ở vùng chúng tiếp xúc nhau, sau đó hình dạng có thể lại được phục hồi. Mức độ biến dạng và hồi phục của các vật va chạm phụ thuộc vào tính đàn hồi của các vật đó. Từ đó ta nhận thấy quá trình va chạm có thể chia hai giai đoạn : Biến dạng và phục hồi.

Giai đoạn biến dạng xảy ra từ lúc hai vật bắt đầu tiếp xúc nhau đến lúc dừng biến dạng. Giai đoạn phụ hồi từ lúc dừng biến dạng đến lúc kết thúc va chạm. Trong giai đoạn này các vật va chạm nhau dần dần trở lại hình dạng cũ đến mức độ nào đó.

Căn cứ vào mức độ phục hồi lại hình dạng cũ của các vật va chạm, người ta phân biệt các loại va chạm như sau :

- Nếu va chạm không có giai đoạn phục hồi được gọi là va chạm mềm hay va chạm không đàn hồi. Đặc điểm cơ bản của loại va chạm này là khi kết thúc quá trình va chạm, những phần tử của hai vật va nhau có cùng vận tốc pháp ở vùng tiếp xúc.

- Nếu va chạm có giai đoạn phục hồi thì gọi là va chạm đàn hồi. Hình dáng cũ của các vật va chạm được phục hồi hoàn toàn gọi là va chạm hoàn toàn đàn hồi. Đặc điểm va chạm đàn hồi là kết thúc va chạm vận tốc pháp truyền các phần tử của hai vật ở vùng tiếp xúc khác nhau.

Để đánh giá sự phục hồi của vật va chạm người ta đưa vào hệ số phục hồi là :

$$k = \frac{S_2}{S_1} \qquad (7\text{-}1)$$

Trong đó $\vec{S}_1 = \int_0^{\tau_1} \vec{N}dt$ là xung lượng va chạm trong giai đoạn biến dạng, còn

$\vec{S}_2 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \vec{N}dt$ là xung lượng va chạm trong giai đoạn phục hồi.

Rõ ràng k=0 là va chạm mềm khi k=1 là va chạm hoàn toàn đàn hồi, còn 0<k<1 là va chạm đàn hồi. Hệ số k phụ thuộc tính chất đàn hồi của các vật va chạm và được xác định bằng thực nghiệm.

3. Bỏ qua di chuyển của hệ trong va chạm :

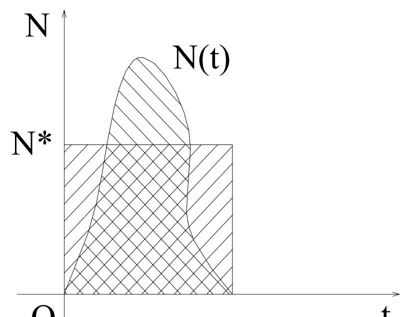
Va chạm xảy ra rất nhanh, nên khi va chạm ta xem như các vật không di chuyển. Thật vậy, quãng đường di chuyển của chất điểm trong khoảng thời gian va chạm là :

$$s = \int_0^{\tau} v.dt \ \leq V_{\max}.\tau$$

V_{max} là đại lượng giới nội và khoảng thời gian τ rất bé, nên s cũng rất bé ta có thể bỏ qua được.

4. Lực va chạm và xung lực va chạm :

Trong va chạm, ngoài những lực thường tác dụng lên cơ hệ như trọng lực, lực cản,..v...v . các chất điểm của cơ hệ còn chịu thêm những phản lực liên kết ở vùng tiếp xúc xuất hiện từ lúc bắt đầu va chạm và mất đi ngay khi hết va chạm. Những phản lực đó gọi là những lực va chạm. Ta ký hiệu lực va chạm là $\vec{N}$ lực va chạm biến đổi trong khoảng thời gian va chạm và có lúc đạt đến giá trị rất lớn, nên nó biểu diễn là hàm thời gian $\vec{N} = \vec{N}$ (t). Vì vậy, người ta thường đánh giá tác dụng lực va chạm trong khoảng thời gian va chạm τ bằng xung lượng va chạm $\vec{S}$.



Hình 7-1

$$\vec{S} = \int_0^{\tau} \vec{N}.dt = \vec{N}*.\tau$$

trong đó $\vec{N}*$ là lực va chạm trung bình.

Áp dụng định lý động lượng cho chất điểm thuộc hệ trong thời gian va chạm ta có :

$$m\Delta\vec{v} = \int_0^{\tau} \vec{F}dt + \int_0^{\tau} \vec{N}dt$$

trong đó $\vec{F}$ là hợp lực các lực thường tác dụng lên chất điểm ấy. Rõ ràng, ta có :

$$\left|\int_0^{\tau} \vec{F}dt\right| \leq F_{\max}.\tau$$

Thực tế F_{max} không lớn lắm mà τ lại rất bé nên xung lượng lực thường cũng rất bé so với xung lượng va chạm. Do đó trong quá trình va chạm ta bỏ qua xung lượng của lực thường. Phương trình trên có dạng :

$$m\Delta\vec{v} = \int_0^{\tau} \vec{N}dt = \vec{S} \qquad (7\text{-}2)$$

Đây là phương trình cơ bản của hiện tượng va chạm.

Ví dụ :

Một búa tạ có khối lượng m = 5kg, vận tốc của búa lúc bặt đầu đập lên vật rèn là v= 5m/s. Thời gian vật đập lên vật rèn là $\tau = 10^{-2}$ giây. tính lực vật đập trung bình cảu búa lên vật rèn.

Bài giải:

Theo phương trình (7-2) ta có :

$$5.5 = S = N^*.\ 10^{-2}$$

ta suy ra : $N^* = \dfrac{25}{10^{-2}} = 2500 \quad N$

Lực này bằng áp lực tĩnh của một vật có khối lượng m = 2500/10 = 250 không gian đè lên. Vì vậy, mà người ta gọi búa ấy là búa tạ, mặc dầu khối lượng chỉ có 250kg.

§2. CÁC ĐỊNH LÝ TỔNG QUÁT ĐỘNG LỰC HỌC

Áp dụng trong quá trình vật chạm. Dựa và phương trình cơ bản :

$$m\Delta\vec{v} = \vec{S}$$

với những giả thuyết đơn giản về lực và di chuyển trong quá trình va chạm. Bây giờ ta sẽ áp dụng các định lý tổng quát động lực cơ hệ vào quá trình va chạm như sau :

2.1 Định lý biến thiên động lượng:

Ta xét va chạm cơ hệ n chất điểm có khối lượng M = $\sum m_k$. Bỏ qua tác dụng xung lượng của lực thường, theo định lí động lượng cơ hệ, ta có :

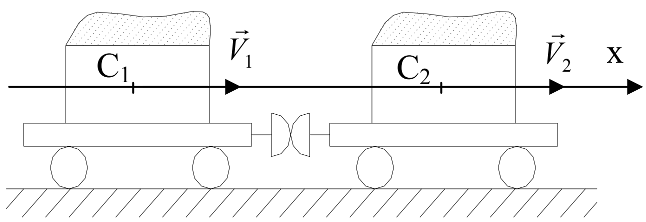
$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \sum \vec{S}_{ek} \qquad (7\text{-}3)$$

Áp dụng định lý này cho trục x, ta có :

$$Q_x - Q_{0x} = \sum S_{ekx} \qquad (7\text{-}4)$$

Ta đã biết $\vec{Q} = \sum m_k \vec{V}_k = M\vec{V}_C$ là động lượng của hệ ngay sau khi va chạm, còn $\vec{Q}_0 = \sum m_k \vec{V}_k(0) = M\vec{V}_C(0)$ là động lượng của hệ ngay trước va chạm. $\vec{V}_C$ và $\vec{V}_C(0)$ là vận tốc khối tâm của hệ sau và trước va chạm.

<u>Ví dụ :</u> Hai toa xe có khối lượng m_1 và m_2 chạy trên đường ray thẳng với vận tốc V_1 và V_2 va vào nhau ($V_1 > V_2$) . Giả thuyết vật chạm mềm, tìm vận tốc chung của hai toa xe sau va chạm.



Hình 7-2

<u>Bài gải :</u>

Khảo sát cơ hệ gồm hai toa xe xung lượng vật chạm giữa chúng là xung lượng trong. Bỏ qua tác dụng của các lực thường là trọng lượng P_1, P_2 và các phản lực đường ray N_1, N_2. Ở đây không có xung lượng va chạm ngoài nên động lượng của hệ được bảo toàn trong quá trình va chạm. Do đó ta có :

$$m_1V_{1x} + m_2V_{2x} = (m_1 + m_2)V_x$$

Từ đó suy ra :

$$V_x = \frac{m_1 V_{1x} + m_2 V_{2x}}{m_1 + m_2}$$

hay :
$$V = \frac{m_1 V_{1x} + m_2 V_{2x}}{m_1 + m_2}$$

2.2 Định lý biến thiên mômen động lượng :

Cũng như trước đây, ta kí hiệu :

$$\vec{L}_O = \sum \vec{m}_O(m_k \vec{V}_k)$$

$$L_z = \sum m_z(m_k \vec{V}_k)$$

là mômen động lượng của hệ đối với tâm O và trục z. Bỏ qua tác dụng của lực thường, áp dụng định lý biến thiên mômen động của hệ, ta có :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k) = \vec{M}_O{}^{(e)}$$

Hay :
$$\vec{L}_O(2) - \vec{L}_O(1) = \int_0^\tau \vec{M}_O{}^{(e)} dt \qquad (a)$$

Nhưng:
$$\int_0^\tau \vec{M}_O{}^{(e)} dt = \int_0^\tau \sum \vec{m}_O(\vec{F}_{ek}) dt = \sum \int_0^\tau (\vec{r}_k \wedge \vec{F}_{ek}) dt$$

Bỏ qua di chuyển của chất điểm trong vật chạm, ta viết được :

$$\int_0^\tau \vec{M}_O{}^{(e)} dt = \sum \vec{r}_k \wedge \int_0^\tau \vec{F}_{ek} dt = \sum \vec{m}_O(\vec{S}_{ek})$$

Do đó, hệ thức (a) có thể viết lại :

$$\vec{L}_O(2) - \vec{L}_O(1) = \sum \vec{m}_O(\vec{S}_{ek}) \qquad (7-5)$$

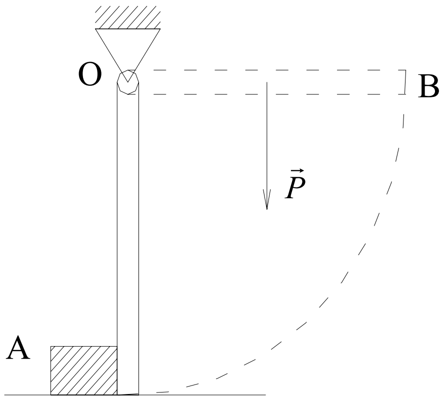
Như vậy : Biến thiên mômen động của hệ đối với tâm O trong thời gian va chạm bằng tổng mômen xung lượng các ngoại lực va chạm tác dụng lên cơ hệ trong cùng thời gian và cùng tâm ấy.

Tương tự đối với trục z, ta cũng có :

$$L_z(2) - L_z(1) = \sum m_z(\vec{S}_{ek}) \qquad (7-6)$$

$L_z(1)$ và $L_z(2)$ là mômen động của hệ đối với trục z trước và sau va chạm.

Ví dụ : Thanh đồng chất OB = l, khối lượng M có trục quay O nằm ngang, được thả từ vị trí nằm ngang đến chạm vào vật A khối lượng M. Tìm vận tốc vật A sau va chạm. Giả thuyết k: hệ số phục hồi k = 0 (H 7.3)



Hình 7-3

Bài giải :

Trước khi khảo sát hiện tượng va chạm, ta xét thanh OB chuyển động từ vị trí nằm ngang đến vị trí thẳng đứng để tìm vận tốc góc của nó trước lúc va chạm.

Áp dụng định lý biên thiên động năng cho thanh OB, ta có :

$$T_1 - T_0 = \Sigma A = Pl/2.$$

Ban đầu thanh nằm yên nên $T_0 = 0$, còn $T_1 = ½.J_0\omega_1^2 = \frac{Ml^2}{6}\omega_1^2$

Thay vào biểu thức (b), ta được :

$$\frac{Ml^2}{6}\omega_1^2 = Pl/2 = Mgl/2.$$

Từ đó ta có : $\omega_1^2 = \frac{3g}{l}$ là vận tốc thanh OB trước lúc va chạm.

Bây giờ ta xét thanh OB và vật A trong giai đoạn va chạm. Lực xuất hiện giữa vật A và thanh OB là nội lực của hệ. Để triệt tiêu lực va chạm ở trục quay O, ta áp dụng định lý mômen động đối với trục O, thì :

$$\vec{m}_O(\vec{S}_{ek}) = 0$$

Do đó, mômen động của hệ đối với trục O được bảo đảm nghĩa là : mômen động của hệ sau va chạm bằng mômen động của hệ đối với tâm O bằng nhau.

$$\vec{L}_O(2) = \vec{L}_O(1)$$

Hay: $$\sum m_0(m\vec{V}) = \sum m_0(m\vec{U})$$

Lúc đầu vật A nằm yên, chỉ có mômen động của thanh, sau va chạm kết thanh thành một khố, lúc đó vận tốc của thanh là ω_2. Ta có :

$$\sum m_0(m\vec{V}) = J_0\omega_1$$

Vì va chạm không đàn hồi (k=0) nên vật A và thanh sau va chạm kết thành một khối, lúc đó vận tốc của thanh là ω_2 . Ta có:

$$\sum m_0(m\vec{U}) = (J_0 + ml^2)\omega_2$$

Như vậy, ta viết được :

$$(J_0 + ml^2)\omega_2 = J_0\omega_1$$

Từ đó ta có :

$$\omega_2 = \frac{J_0}{J_0 + ml^2}\omega_1$$

Vận tốc vật A sau va chạm là :

$$V_A = l.\omega_2 = \frac{J_0}{J_0 + ml^2} l\omega_1$$

Thay biểu thức : $J_0 = \frac{Ml^2}{3}$ và $\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{l}}$ cuối cùng ta nhận được :

$$V_A = \frac{M}{M + 3m}\sqrt{3gl}$$

2.3 Định lý mất động năng :

Nói chung trong va chạm một phần động năng bị tiêu hao chuyển hóa thành nhiệt năng. Vì vậy trong va chạm không áp định lý bảo toàn cơ năng.

Lượng động năng bị mất mát la $\Delta T = T_1 - T_2 > 0$, trong đó T_1 và T_2 là động năng của hệ trước và sau va chạm. Trong va chạm ta không thể tính được công các lực va chạm tổng quá trình va chạm, nên ta không dùng định lý động năng. Sau đây, ta sẽ dùng định lý động lượng và mômen động lượng đê nghiên cứu một số bài toán ứng dụng va chạm.

§3. HAI BÀI TOÁN VỀ VA CHẠM

Sau đây là hai bài toán va chạm được ứng dụng quan trọng.

3.1 Va chạm xuyên tâm của hai vật chuyển động tịnh tiến :

<u>1. Đặt vấn đề :</u> Giả sử có hai vật M_1 và M_2 có khối lượng m_1 và m_2 va chạm nhau. Vận tốc của chúng trước va chạm là $\vec{V}_1$ và $\vec{V}_2$.

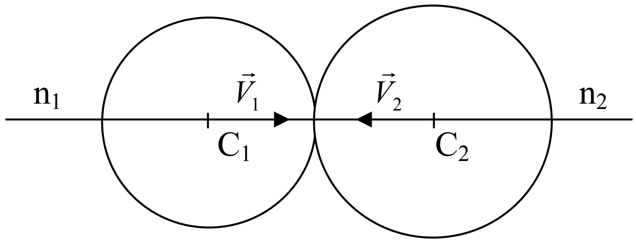
Gọi pháp tuyến chung của hai mặt tiếp xúc nhau của hai vật tại điểm I là n_1In_2 và khối tâm của chung là C_1 và C_2 .

Đường thẳng n_1In_2 gọi là đường va chạm, đường thẳng C_1C_2 gọi là đường xuyên tâm. Từ đó ta có định nghĩa :

Va chạm thẳng xuyên tâm của hai vật chuyển động tịnh tiến là đường va chạm trùng với đường thẳng xuyên tâm của hai vật và vận tốc $\vec{V}_1$ và $\vec{V}_2$ đều nằm trên đường ấy.

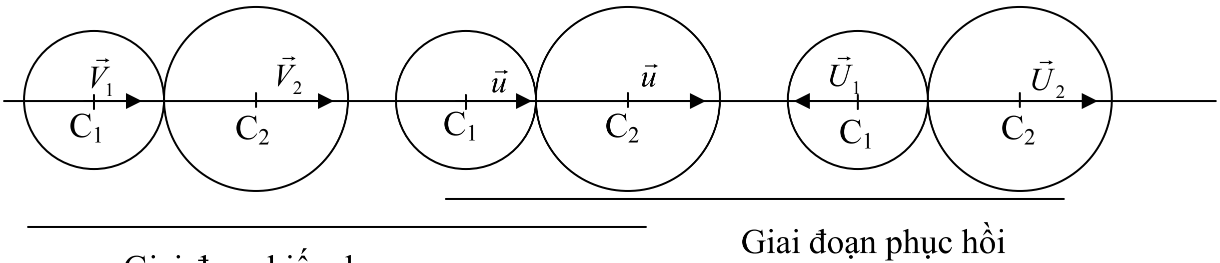
Sau đây ta chỉ xét va chạm thẳng xuyên tâm của hai vật với mô hình đơn giản ta xét va chạm hai quả cầu.

Ta gọi $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ và $\vec{U}_1$, $\vec{U}_2$ là vận tốc ngay trước và sau va chạm của hai quả cầu. Ta sẽ tìm vận tốc vủa chúng sau va chạm, xung lượng va chạm và mất động năng trong va chạm.



Hình 7-4

<u>*2. Giải bài toán :*</u> Giả sử hai quả cầu có khối lượng m_1 và m_2 vận tốc trước va chạm V_1 và V_2 ($V_1 > V_2$). Các giai đoạn va chạm như hình vẽ (7-5).



Hình 7-5

Áp dụng định lý biến thiên động lượng trong quá trình va chạm cho hai giai đoạn, ta có :

Giai đoạn biến fạng :

$$m_1(u - V_1) = S_{21} = -S_1 \qquad (a)$$

$$m_1(u - V_2) = S_{12} = S_1 \qquad (b)$$

Giai đoạn phục hồi

$$m_1(U_1 - u) = S'_{21} = -S_2 \qquad (c)$$

$$m_1(U_2 - u) = S'_{12} = S_2 \qquad (d)$$

Trong đó $\vec{u}$ là vận tốc chung của hai vật lúc kết thúc giai đoạn biến dạng chuyển sang giai đoạn phục hồi. $\vec{S}_{12}, \vec{S}_{21}$ xung lượng tương hỗ giữa hai vật trong giai đoạn phục hồi.

Ngoài ra bốn phương trình trên, ta còn có một phương trình nữa là :

$$S_2 = kS_1 \qquad \text{(e)}$$

Giải hệ năm phương trình trên, ta nhận được :

$$u = \frac{m_1V_1 + m_2V_2}{m_1 + m_2}$$

$$u_1 = V_1 - (1+k)\frac{m_2}{m_1 + m_2}(V_1 - V_2)$$

$$u_1 = V_1 + (1+k)\frac{m_1}{m_1 + m_2}(V_1 - V_2) \qquad (7\text{-}7)$$

$$S_1 = \frac{m_1.m_2}{m_1 + m_2}\left|V_1 - V_2\right|$$

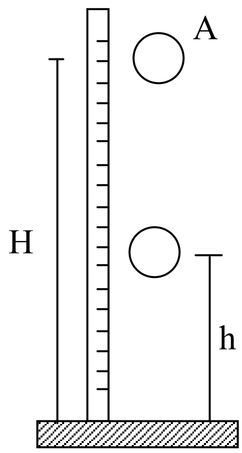
$$S_1 = \frac{m_1.m_2}{m_1 + m_2}\left|U_2 - U_1\right| \qquad (7\text{-}8)$$

3. Xác định hệ số phụ hồi bằng thực nghiệm :

Từ kết quả trên, ta có hệ số phụ hồi :

$$k = \left|\frac{S_2}{S_1}\right| = \left|\frac{U_2 - U_1}{V_2 - V_1}\right| = \frac{U_r}{V_r}$$

Trong đó $U_r = |U_2 - U_1|$ và $V_r = |V_2 - V_1|$ là vận tốc tương đối của hai vật va chạm xuyên tâm ngay sau và trước va chạm. Dựa vào công vừa tìm được, người ta tiến hành nhiều thí nghiệm xác định hệ số k. Sau đây là một trong các thí nghiệm ấy.



Hình 7-6

Ta thả viên bi rơi xuống không vận tốc đầu từ độ cao H tới nền nằm ngang cố định, sau đó viên bi bật lên độ cao lớn nhất h rồi lại rơi xuống. Vì nền cố định, nên $V_2 = U_2 = 0$ theo công thức Galilê thì vận tốc viên bi trước và sau va chạm là $V_1 = \sqrt{2gH}$. Do đó hệ số phục hồi :

$$k = \frac{U_r}{V_r} = \left|\frac{U_1}{V_1}\right| = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gH}} = \sqrt{\frac{h}{H}}$$

4. Biểu thức mất động năng :

Trong khi hai vật va chạm nhau thì một phần động năng bị mất đi là $\Delta T = T_1 - T_2$ trong đó T_1 và T_2 là động năng của hệ ngay trước và sau va chạm.

Theo định nghĩa ta có :

$$T_1 = \frac{m_1 V_1^{\ 2}}{2} + \frac{m_2 V_2^{\ 2}}{2}$$

$$T_1 = \frac{m_1 U_1^{\ 2}}{2} + \frac{m_2 U_2^{\ 2}}{2}$$

Do đó ΔT = $T_2 - T_1$ = $\frac{m_1}{2}(V_1^{\ 2} - U_1^{\ 2}) + \frac{m_2}{2}(V_2^{\ 2} - U_2^{\ 2})$. Theo công thức (7-7) sau khi biến đổi ta nhận được :

$$\Delta T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1 - k^2)(V_1 - V_2)^2 \qquad (7-9)$$

Ta sẽ áp dụng công thức này vào việc dùng búa rèn và đóng cọc đinh. Trước khi va đập búa có vận tốc V_1 còn vật bị va đập $V_2 = 0$. Khi đó :

$$\Delta T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1 - k^2).V_1^{\ 2}$$

Nếu T_1 là động năng của hệ trước va đập, ta có :

$$\Delta T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1 - k^2).T_1$$

Hay : $\frac{\Delta T}{T_1} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1 - k^2) = \frac{1 - k^2}{1 + \frac{m_1}{m_2}}$ là hiệu suất của búa rèn.

Rõ ràng để tăng hiệu suất η thì ta phải giảm tỉ số $\frac{m_1}{m_2}$, nghĩa là khối lượng của búa phải hơn khối lượng của đe rất nhiều.

<u>*Vídụ :*</u> Nếu $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{10}$ và k = 0 thì η = 90%. Khi dùng búa đóng cọc hay đóng đinh , lượng ΔT là vô ích, từ công thức trên ta tìm hiệu suất của búa là :

$$\eta = \frac{T_1 - \Delta T}{T_1} = 1 - \frac{\Delta T}{T_1} = 1 - \frac{1 - k^2}{1 + \frac{m_1}{m_2}}$$

Vậy muốn tăng hiệu suất của búa thì khối lượng của búa phải lớn hơn không lượng của đinh hay cọc rất nhiều lần.

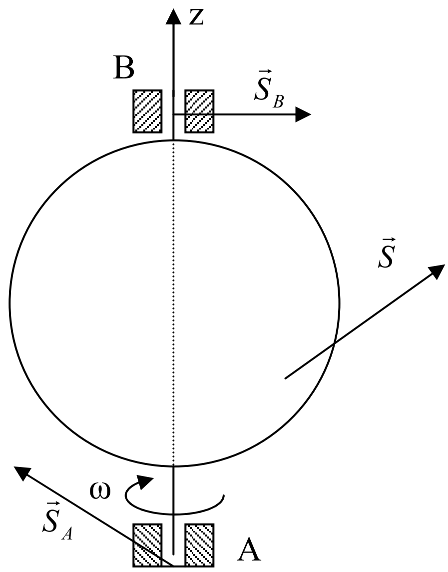
Vậy muốn tăng hiệu suất của búa thì khối lượng của búa phải lớn hơn không lượng của đinh hay cọc rất nhiều lần.

Ví dụ : $\frac{m_1}{m_2} = 10$, k = 0 thì η = 90%.

3.2 Va chạm của vật qauy. Tâm va chạm :

1. Va chạm của vật quay:

Giả sử ta có vật rắn quay quanh trục z cố định, chịu tác dụng xung lượng $\vec{S}$. Khi đó ở các ổ đỡ A và B sẽ xuất hiện các xung lượng va chạm $\vec{S}_A$ và $\vec{S}_B$. Áp dụng định lý biến thiên mômen động lượng ta có:



Hình 7-7

$$L_z(2) - L_z(1) = \sum m_z(\vec{S}_{ek}) \quad \text{(a)}$$

Trong đó $L_z(1) = J_z.\omega_1$, $L_z(1) = J_z.\omega_2$ là mômen động lượng của vật đối với trục z trước và sau va chạm. Còn :

$$\sum m_z(\vec{S}_{ek}) = m_z(\vec{S}) + m_z(\vec{S}_A) + m_z(\vec{S}_B).$$

Nhưng $m_z(\vec{S}_A) = m_z(\vec{S}_B) = 0$. Cho nên phương trình (a) có thể viết :

$$J_z(\omega_2 - \omega_1) = m_z(\vec{S})$$

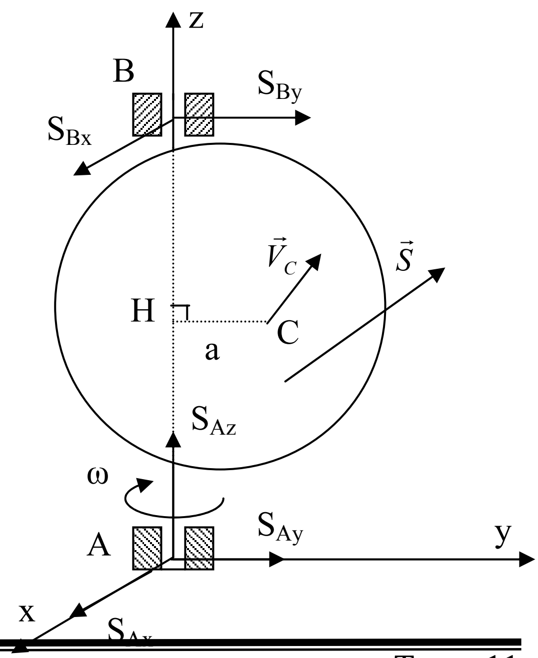
Hay : $$\omega_2 - \omega_1 = \frac{m_z(\vec{S})}{J_z} \quad \text{(7-10)}$$

2. Xung lượng phản lực va chạm :

Bây giờ ta tìm xung lượng phản lực va chạm ổ trục A và B là $\vec{S}_A$ và $\vec{S}_B$. Muốn vậy, ta chọn hệ trục Axyz sao cho khối tâm C của vật nằm trong mặt phẳng Ayz. Giả sử AB = b, HC = a. (HC ⊥ trục z). Áp dụng các định lý động lượng và mômen động lượng với chú ý hình chiếu động lượng lên các trục tọa độ là

$$Q_{1x} = -MV_C(1) = -M.a.\omega_1$$

$$Q_{2x} = -MV_C(2) = -M.a.\omega_2$$



Hình 7-8

Còn $Q_y = Q_z = 0$. Do đó, ta có :

$$\begin{aligned}
&-Ma(\omega_2-\omega_1) = S_{Ax}+S_{Bx}+S_x\\
&S_{Ay}+S_{By}+S_y=0\\
&S_{Az}+S_z=0\\
&-J_{xz}(\omega_2-\omega_1) = -S_{By}.b+m_x(\vec{S})\\
&-J_{yz}(\omega_2-\omega_1) = S_{By}.b+m_y(\vec{S})
\end{aligned}$$

Từ năm phương trình này ta tìm được xung lượng phản lực : S_{Ax}, $S_{Ay,}$ $S_{Az,}$ $S_{Bx,}$ S_{By}.

3. Tâm va chạm :

Từ kết quả trên ta nhận thấy rằng khi tác dụng xung lượng $\vec{S}$ lên vật quay mà không sinh ra phản lực động lực $\vec{S}_A$ và $\vec{S}_B$ ở các ổ trục do va chạm gây ra, nên thỏa mãn điều kiện sau :

$$\vec{S}_A = \vec{S}_B = 0$$

Ta suy ra : $S_y = S_z = 0$, nghĩa là xung lượng $\vec{S}$ phải vuông góc mặt phẳng Ayz hay nói cách khác là xung lượng $\vec{S}$ vuông góc mặt phẳng chứa trục quay và khối tâm C của vật. Vì $\vec{S}_A = \vec{S}_B = 0$ nên hệ phương trình không phụ thuộc vào việc chọn gốc tọa độ. Vì vậy, để đơn giản ta có thể chọn hệ trục tọa độ mới là Oxyz, mà xung lượng $\vec{S}$ nằm trong mặt phẳng Oxy. Khi đó, ta có :

$$m_x(\vec{S}) = m_y(\vec{S}) = 0$$

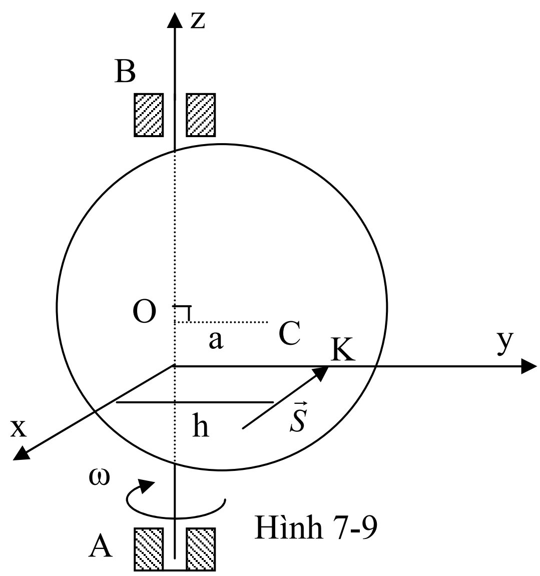
và từ hệ phương trình ta suy ra $J_{xy} = J_{yz} = 0$, nghĩa là mặt phẳng Oxy là mặt phẳng đối xứng. Như vậy, từ phương trình đầu của hệ phương trình ta có : $S = Ma(\omega_2 - \omega_1)$, vì $S_A=S_B = 0$ nên $S_{Ax}=S_{Bx} = 0$, còn $S_x = -S$.

Ta đã biết :

$$\omega_2-\omega_1 = \frac{m_z(\vec{S})}{J_z} = \frac{hS}{J_z}$$

Cuối cùng ta cũng nhận được :

$$h = \frac{J_z}{Ma} \qquad (7\text{-}12)$$



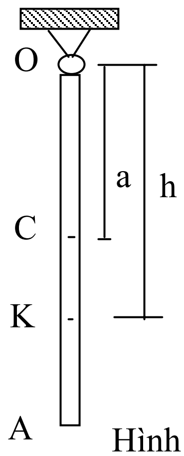
Hình 7-9

Tóm lại, muốn cho vật quay quanh một trục cố định không phát sinh phản lực va chạm. Khi có xung lực tác dụng thì cần có các điều kiện sau :

a) Xung lượng va đập $\vec{S}$ nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục quay và trục quay là trục quán tính chính đối với giao điểm của trục với mặt phẳng ấy.

b) Xung lượng va đập $\vec{S}$ phải vuông góc mặt phẳng chứa trục quay và khối tâm của vật.

c) Xung lượng va đập $\vec{S}$ cách trục quay một đoạn $h = \frac{J_z}{Ma}$ và ở về cùng phía với khối tâm của vật.



Hình 7-10

Ví dụ : Tìm tâm va chạm của thanh đồng chất OA = l quay quanh trục O vuông góc thanh.

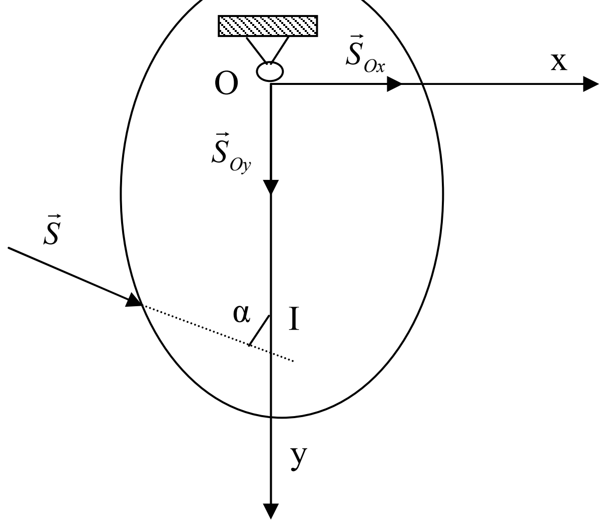
Bài giải: Giả sử xung lượng va đập $\vec{S}$ thỏa mãn điều kiện trên va đập là K. Áp dụng công thức trên ta có :

$$h = \frac{J_z}{Ma} = \frac{Ml^2}{3\frac{Ml}{2}}$$

$$h = \frac{2}{3}l$$

Va chạm của vật quy quanh trục cố định và tâm va chạm

a) Bài toán : Cho tấm phẳng quay quanh một trục vuông góc với mặt tấm tại O. Xung lượng va chạm $\vec{S}$ tác dụng trong mặt phẳng của tâm tạo bởi OC một góc α. Tại thời điểm va chạm, tấm có vận tốc góc ω_0. Hãy tìm vận tốc góc ω của tâm sau va chạm và xung lượng của các phản lực ở trục O.



Bài giải: Xét tấm quay

Áp dụng định lí động lượng ta có :

$$M\vec{V}_{1C} - M\vec{V}_{OC} = \vec{S} + \vec{S}_0 \qquad (1)$$

Còn theo động lượng mômen động lượng ta có :

$$J_O.\overline{\omega}_1 - J_O.\overline{\omega}_0 = \overline{m}_0(\vec{S}) \qquad (2)$$

Từ (1) đối với trục Ox, Oy ta có :

$$\begin{aligned} MV_{1C} - MV_{OC} &= S_{Ox} + S\sin\alpha \\ 0 &= S_{Oy} + S\cos\alpha \end{aligned} \qquad (3)$$

(2) => $J_O(\omega_1 - \omega_0) = S.\sin\alpha.OI$

Đặt OC = a, ta có $V_{1C} = a\omega_1$, $V_{OC} = a\omega_0$

(3) => $Ma(\omega_1 - \omega_0) = S.\sin\alpha.OI$ (5)

Từ (3), (4) & (5) ta tìm được :

$$\begin{aligned} \overline{\omega}_1 &= \vec{\omega}_0 + \frac{S}{J_0} OI\sin\alpha \\ S_{Oy} &= -S\cos\alpha \\ S_{Ox} &= S.\sin\alpha\left(\frac{Ma.OI}{J_0} - 1\right) \end{aligned} \qquad (a)$$

Tâm va chạm :

$S_{Oy} = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \pi/2$

$S_{Ox} = 0 \Rightarrow \frac{Ma.OI}{J_0} - 1 = 0 \Rightarrow OI = \frac{.J_0}{Ma}$

Vậy ở tại trục O chúng xuất hiện xung lực va chạm của phản lực khi tấm chịu tác dụng lực va chạm $\vec{S}$. Thì $\vec{S}$ phải vuông góc đường thẳng OC và đi qua I $\in$OC, sao cho $OI = \frac{.J_0}{Ma}$. Điểm được gọi là tâm va chạm.