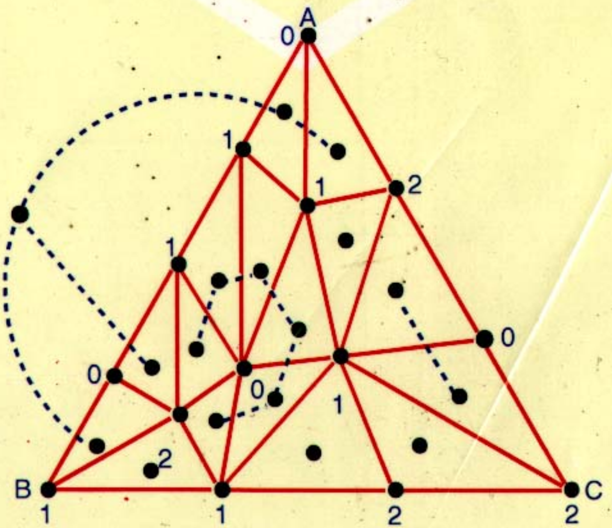
LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

Sách dùng cho Sinh Viên các trường Đại học

NGÀNH TIN HỌC

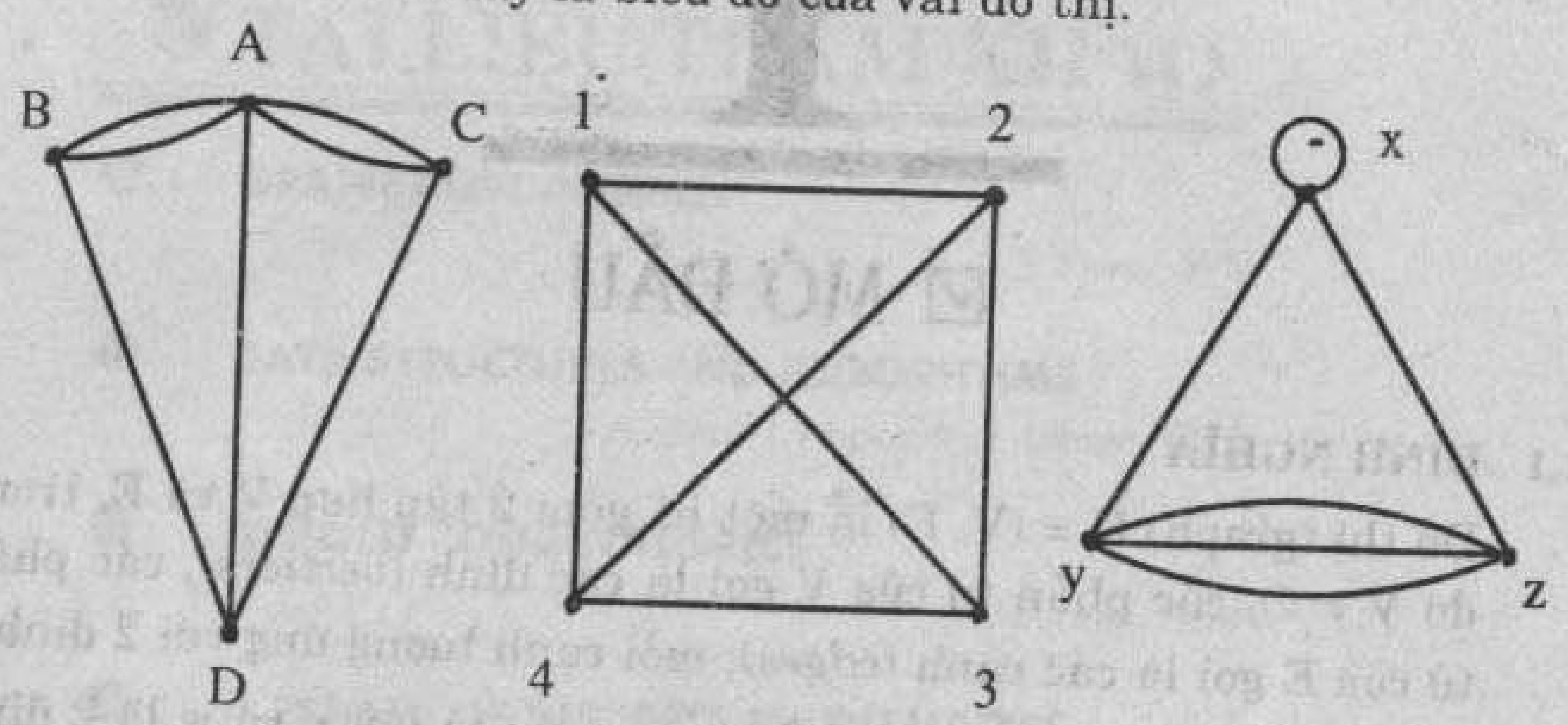


MỤC LỤC

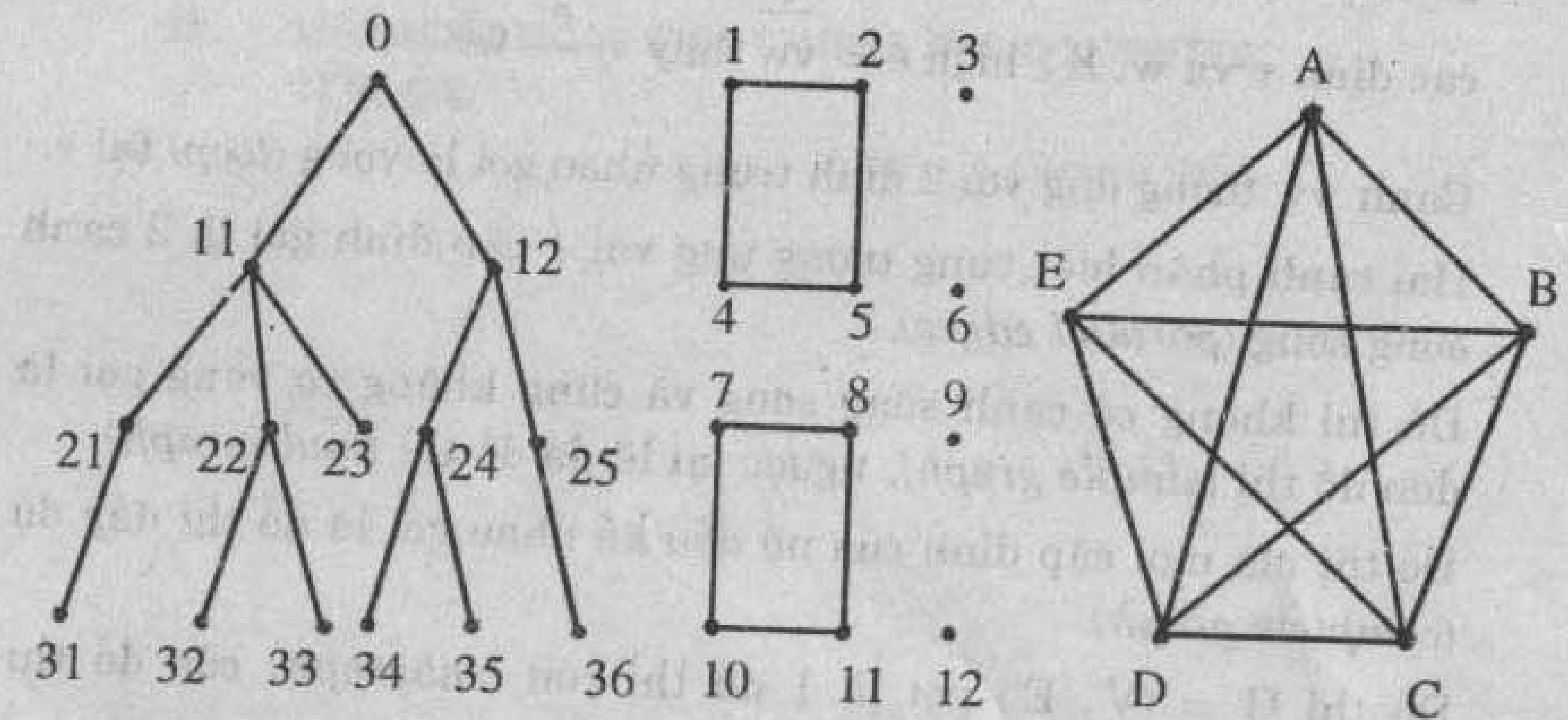
1.2 BIỂU ĐỒ

Một đồ thị thường được biểu diễn bằng một biểu đồ như sau:.
Mỗi đỉnh biểu diễn thành 1 điểm và mỗi cạnh biểu diễn thành 1 đoạn nối 2 đỉnh tương ứng với nó.

THÍ DỤ 1: Dưới đây là biểu đồ của vài đồ thị.

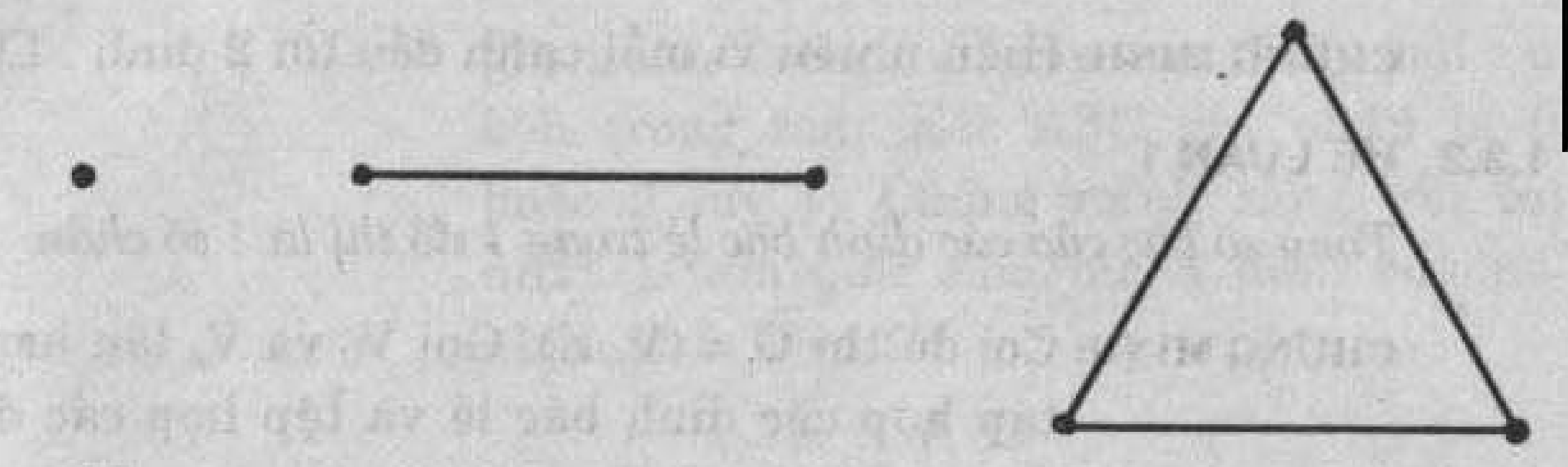


G_1 G_2 G_3

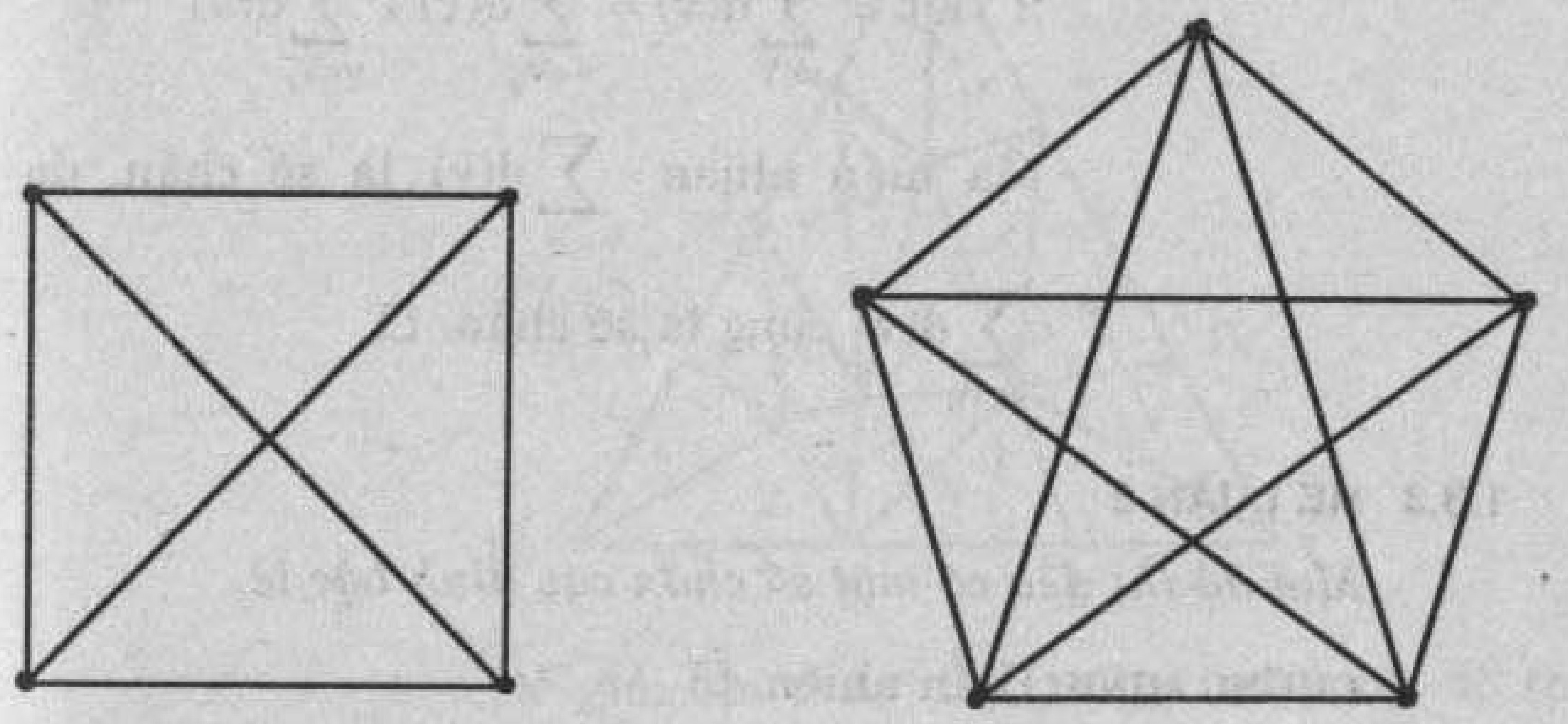


G_4 G_5 G_6 □

THÍ DỤ 2: Ta dùng ký hiệu K_n để chỉ đơn đồ thị đầy đủ có n đỉnh. Biểu đồ của K_n với $1 \le n \le 5$ như sau :



K_1 K_2 K_3



K_4 K_5 □

1.3 BẬC CỦA MỘT ĐỈNH

Xét một đỉnh v trong đồ thị G. Số cạnh tới v, trong đó mỗi vòng tại v được kể là 2 cạnh tới v, gọi là bậc *(degree)* của v và ký hiệu là d(v).

Đỉnh có bậc 0 gọi là đỉnh cô lập *(isolated vertex)*.

Đỉnh có bậc 1 gọi là đỉnh treo *(pendant vertex)*, cạnh tới đỉnh treo gọi là cạnh treo *(pendant edge)*.

Đồ thị mà mọi đỉnh đều là đỉnh cô lập gọi là đồ thị rỗng *(null graph)*.

1.3.1 ĐỊNH LÝ

Với mọi đồ thị G = (V, E), ta có: $\sum_{v \in V} d(v) = 2\,|E|$

CHỨNG MINH: Hiển nhiên vì mỗi cạnh đều tới 2 đỉnh . □

1.3.2 HỆ LUẬN 1

Tổng số bậc của các đỉnh bậc lẻ trong 1 đồ thị là 1 số chẵn.

CHỨNG MINH: Coi đồ thị G = (V, E). Gọi V_0 và V_e lần lượt là tập hợp các đỉnh bậc lẻ và tập hợp các đỉnh bậc chẵn của G. Ta có :

$$2\,|E| = \sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V_0} d(v) + \sum_{v \in V_e} d(v)$$

Mà hiển nhiên $\sum_{v \in V_e} d(v)$ là số chẵn, do đó $\sum_{v \in V_0} d(v)$ cũng là số chẵn. □

1.3.3 HỆ LUẬN 2

Mọi đồ thị đều có một số chẵn các đỉnh bậc lẻ.

CHỨNG MINH: Hiển nhiên. □

1.3.4 HỆ LUẬN 3

Đồ thị K_n có $\frac{1}{2}n(n-1)$ cạnh.

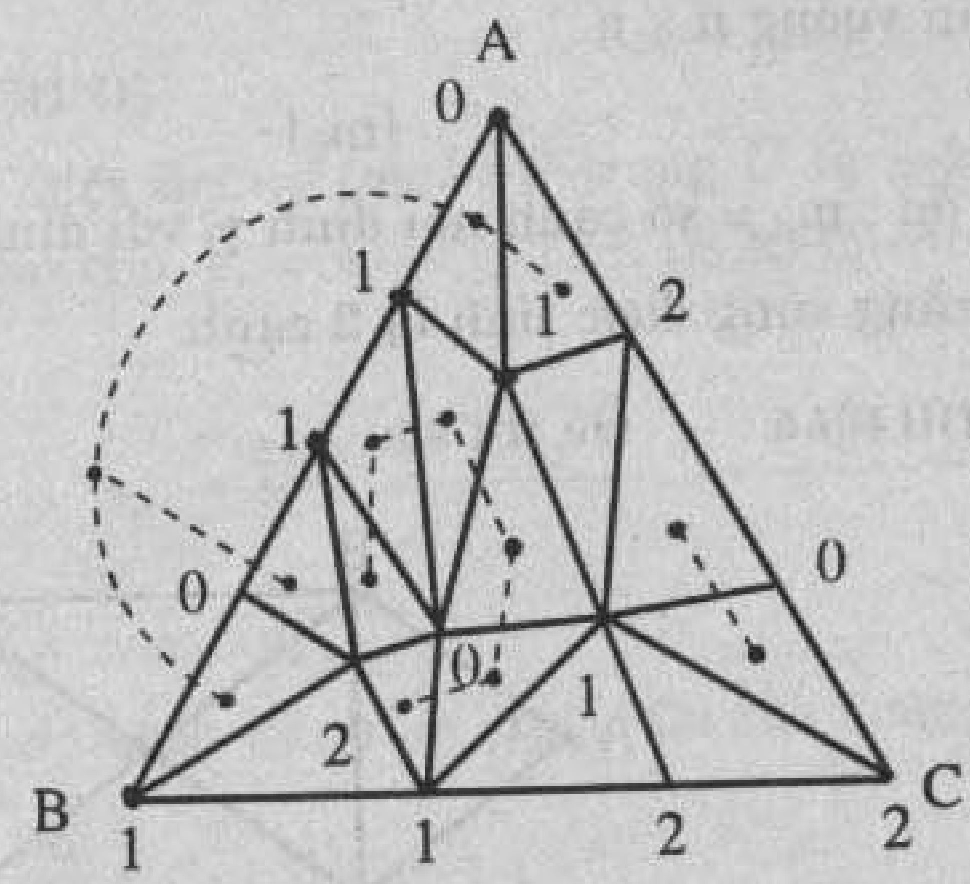
CHỨNG MINH: Mọi đỉnh của K_n đều có bậc là n – 1. □

THÍ DỤ 3: Một đồ thị G = (V, E) có 24 cạnh và mỗi đỉnh của G đều có bậc là 4. Tìm số đỉnh G.

Ta có : $2.24 = 4.|V| \Rightarrow |V| = 12$. □

THÍ DỤ 4: Xét tam giác có 3 đỉnh là A, B, C được ghi nhãn lần lượt là 0, 1, 2. Chia ABC thành nhiều tam giác nhỏ và ghi nhãn cho các đỉnh mới theo điều kiện sau : Các đỉnh mới nằm trên cạnh AB được ghi nhãn 0 hoặc 1, các đỉnh mới nằm trên cạnh BC được ghi nhãn 1 hoặc 2, các đỉnh mới nằm trên cạnh CA được

ghi nhãn 2 hoặc 0, còn các đỉnh mới [redacted] bên trong tam giác ABC ghi nhãn là [redacted] hoặc 2 tùy ý. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 1 tam giác nhỏ mà 3 đỉnh của nó có nhãn là 0, 1 và 2.



Để giải bài toán này, ta lập mô hình đồ thị sau : Chọn trong mỗi tam giác nhỏ 1 điểm làm đỉnh, và thêm 1 đỉnh ở bên ngoài tam giác ABC, 2 đỉnh sẽ được nối với nhau bằng 1 cạnh nếu 2 tam giác nhỏ tương ứng có 2 đỉnh chung là 0 và 1. Dễ thấy rằng :

- Đỉnh ở ngoài tam giác ABC có bậc lẻ vì các đỉnh trên cạnh AB được ghi nhãn thay đổi giữa 0 và 1 một số lẻ lần.
- Tam giác nhỏ có 3 đỉnh ghi nhãn khác nhau thì đỉnh tương ứng có bậc 1.
- Tam giác nhỏ có 3 đỉnh ghi nhãn không đôi một khác nhau thì đỉnh tương ứng có bậc 0 hay bậc 2.

Vì số đỉnh bậc lẻ của đồ thị là số chẵn nên phải tồn tại 1 tam giác nhỏ có 3 đỉnh ghi nhân khác nhau. □

1.4 MA TRẬN LIÊN KẾT

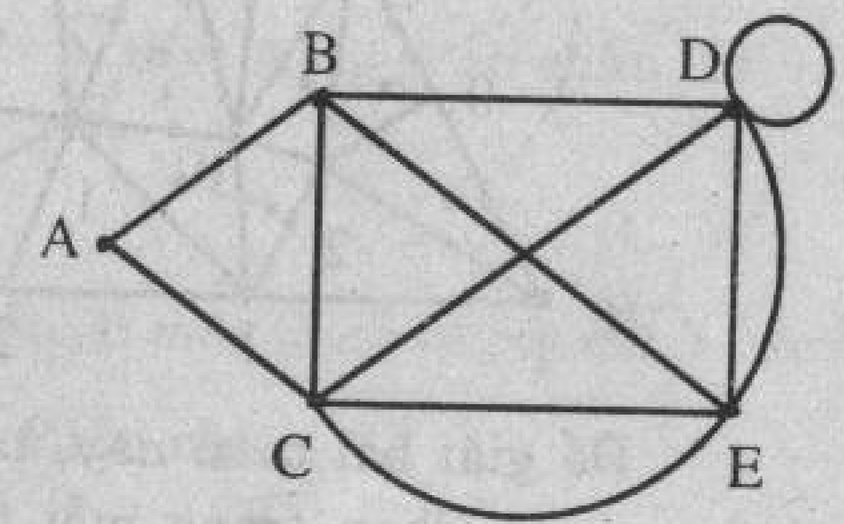
Cho đồ thị G có n đỉnh là $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Ma trận liên kết *(adjacency matrix)* của G, với thứ tự các đỉnh là $v_1, v_2, \ldots, v_n$ là ma trận vuông $n \times n$

$$[m_{ij}]$$

trong đó , m_{ij} = số cạnh nối đỉnh v_i với đỉnh v_j $(1 \le i, j \le n)$.

Lưu ý rằng vòng được tính là 2 cạnh.

THÍ DỤ 5: Đồ thị sau :



có ma trận liên kết là :

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

1.4.1 ĐỊNH LÝ

Tổng các phần tử trên hàng (hoặc cột) thứ i của ma trận liên kết bằng bậc của đỉnh v_i, nghĩa là :

$$d(v_i) = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} = \sum_{k=1}^{n} m_{ki}$$

CHỨNG MINH: Hiển nhiên. □

1.5 ĐƯỜNG VÀ CHU TRÌNH

Cho một đồ thị G. Một đường *(path)* P trong G là một dãy các đỉnh $v_0, v_1, \ldots, v_k$ sao cho $e_i = \overline{v_{i-1}v_i}$ $(1 \le i \le k)$ là các cạnh đôi một khác nhau.

Ta ký hiệu : $P = v_0 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_2} \ldots \xrightarrow{e_k} v_k$

hay $P = v_0 v_1 \ldots v_k$

Số k (là số cạnh tạo thành P) gọi là chiều dài của đường P.

Ký hiệu : $l(P) = k$

Ta nói đường P nối 2 đỉnh v_0 và v_k, các đỉnh v_i $(0 \le i \le k)$ và các cạnh e_i $(1 \le i \le k)$ gọi là nằm trên đường P.

Một đỉnh xem là một đường có chiều dài bằng 0.

Một chu trình *(cycle/circuit)* trong G là một đường trong G có dạng $c = v_0 v_1 \ldots v_{k-1} v_0$ với $l(c) \ge 1$.

Ta không cần chú ý đến đỉnh nào là đỉnh bắt đầu (và cũng là đỉnh kết thúc) của chu trình, nói cách khác, các chu trình $v_0 v_1 \ldots v_{i-1} v_i v_{i+1} \ldots v_{k-1} v_0$ và $v_i v_{i+1} \ldots v_{k-1} v_0 v_1 \ldots v_{i-1} v_i$ được đồng nhất với nhau là một.

Một đường (hay chu trình) gọi là đơn giản *(simple)* nếu nó không đi qua đỉnh nào quá một lần.

1.6 SỰ LIÊN THÔNG

Một đồ thị gọi là liên thông *(connected)* nếu mọi cặp đỉnh của nó đều được nối với nhau bởi một đường.

Xét một đồ thị G = (V, E). Trên tập hợp V, ta định nghĩa hệ thức ~ như sau :

$$\forall v, w \in V,\ v \sim w \Leftrightarrow \text{có 1 đường trong G nối } v \text{ và } w$$

Dễ thấy rằng ~ là 1 hệ thức tương đương trên V và hệ thức ~ phân cát V thành các lớp tương đương. Mỗi lớp tương đương này tương ứng với 1 đồ thị con liên thông của G gọi là 1 thành phần liên thông *(connected component)* của G. Hai thành phần liên thông khác nhau của G thì cách biệt, nghĩa là chúng không có đỉnh chung.

Hiển nhiên G liên thông $\Leftrightarrow$ G có đúng 1 thành phần.

THÍ DỤ 6: Chứng minh kết quả sau :

Một đơn đồ thị G có n đỉnh và k thành phần thì có tối đa là $\frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$ cạnh.

Gọi n_i và c_i ($1 \le i \le k$) lần lượt là số đỉnh và số cạnh của thành phần thứ i của G. Ta có :

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n \Rightarrow \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) = n - k$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)^2 \le (n-k)^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} n_i^2 \le (n-k)^2 + 2n - k$$

Vì G là đơn đồ thị nên giữa 2 đỉnh, có nhiều nhất 1 cạnh nối chúng, do đó nếu gọi c là số cạnh của G thì :

$$c = \sum_{i=1}^{k} c_i \le \sum_{i=1}^{k}\binom{n_i}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}(n_i^2 - n_i)$$

$$\le \frac{1}{2}\left[(n-k)^2 + 2n - k - n\right] = \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$$

1.7 SỰ ĐẲNG HÌNH

Hai đồ thị G = (V, E) và G' = (V', E') gọi là đẳng [redacted] *(isomorphic)* với nhau nếu có 1 phép tương ứng 1–1 (song ánh) giữa hai tập hợp V, V' và có 1 phép tương ứng 1–1 giữa hai tập hợp E, E' sao cho nếu cạnh $e = \overline{vw} \in E$ tương ứng với cạnh $e' = \overline{v'w'} \in E'$ thì cặp đỉnh $v, w \in V$ cũng là tương ứng của cặp đỉnh $v', w' \in V'$.

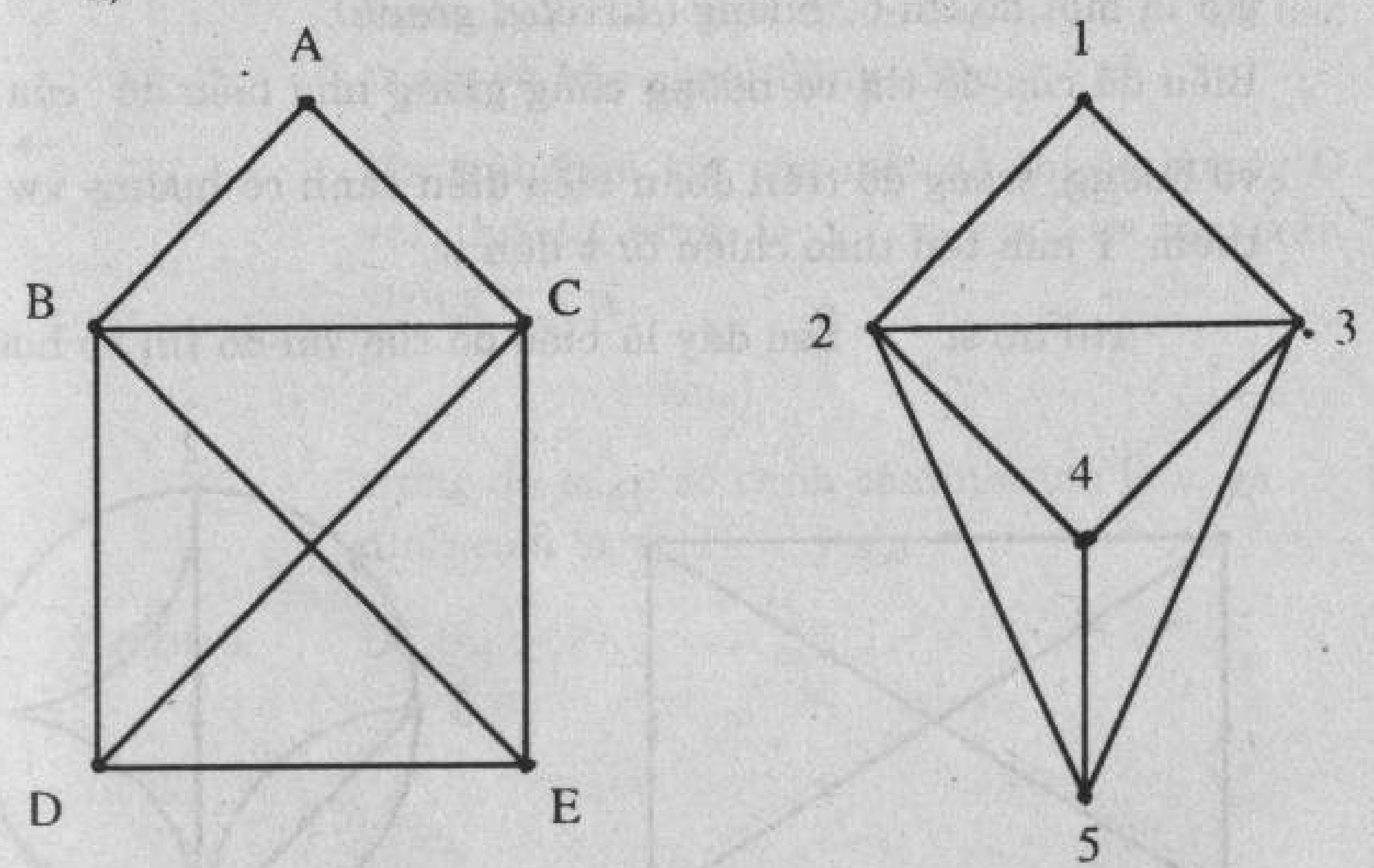
Hiển nhiên nếu 2 đồ thị đẳng hình với nhau thì chúng phải có :

- Cùng số đỉnh.
- Cùng số đỉnh bậc k, $\forall k$ nguyên ≥ 0.
- Cùng số cạnh.
- Cùng số thành phần.

Nếu hai đồ thị có ma trận liên kết (theo 1 thứ tự đỉnh nào đó) bằng nhau thì chúng đẳng hình với nhau.

THÍ DỤ 7: Các cặp đồ thị sau đẳng hình với nhau :

a)



5. Tìm đơn đồ thị mà mọi đỉnh của nó đều có bậc 3 và có :

a) 4 đỉnh　　c) 6 đỉnh

b) 5 đỉnh　　d) 8 đỉnh.

6. Tìm số đỉnh của đồ thị G biết rằng G có :

a) 12 cạnh và mọi đỉnh đều có bậc 2.

b) 15 cạnh , 3 đỉnh bậc 4 và các đỉnh còn lại bậc 3.

c) 6 cạnh và mọi đỉnh đều có bậc bằng nhau.

7. Một đồ thị có 19 cạnh và mỗi đỉnh đều có bậc ≥ 3. Đồ thị này có tối đa là bao nhiêu đỉnh ?

8. Biết rằng mọi đỉnh của một đồ thị G đều có bậc bằng số lẻ p. Chứng minh rằng số cạnh của G là một bội số của p.

9. Có thể có 1 nhóm 9 người trong đó mỗi người đều chỉ quen biết đúng 5 người khác trong nhóm hay không ?

10. Coi đơn đồ thị G = (V, E) với :

$$V = \{1, 2, \ldots, n\} \quad (n \geq 2)$$

$$\text{và } E = \{\overline{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n,\ i \neq j,\ i + j \text{ chẵn}\}$$

Chứng minh rằng G không liên thông. Xác định số thành phần của G.

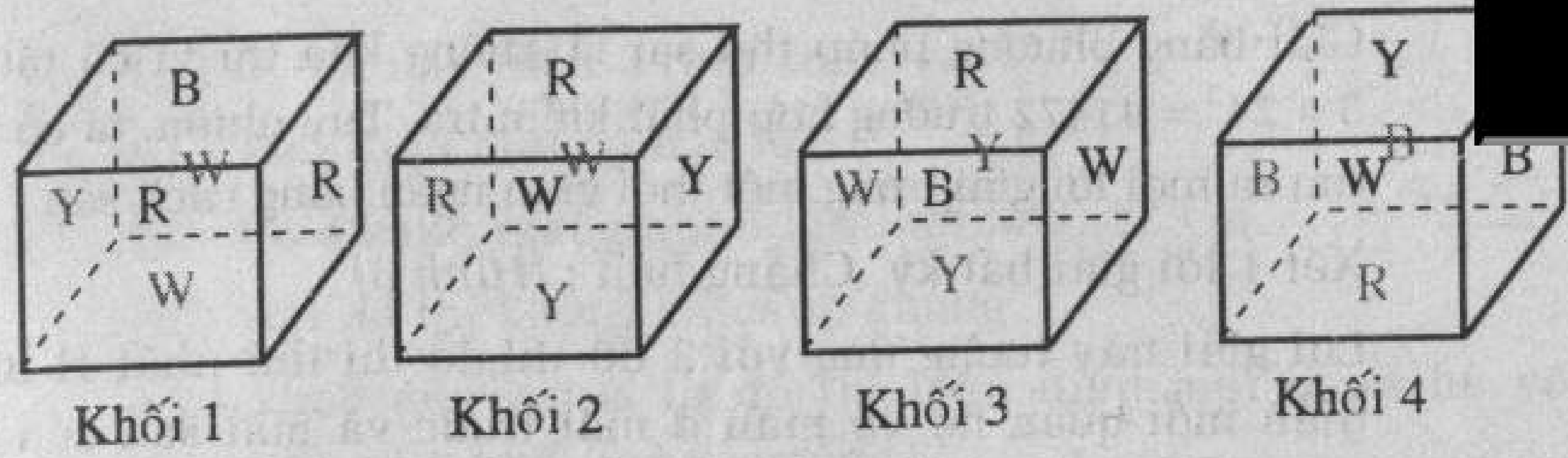
11. Coi đơn đồ thị G = (V, E) với $V = \{2, 3, \ldots, 41\}$

và $E = \{\overline{ij} \mid 2 \leq i, j \leq 41,\ i \neq j$, i và j không nguyên tố cùng nhau$\}$.

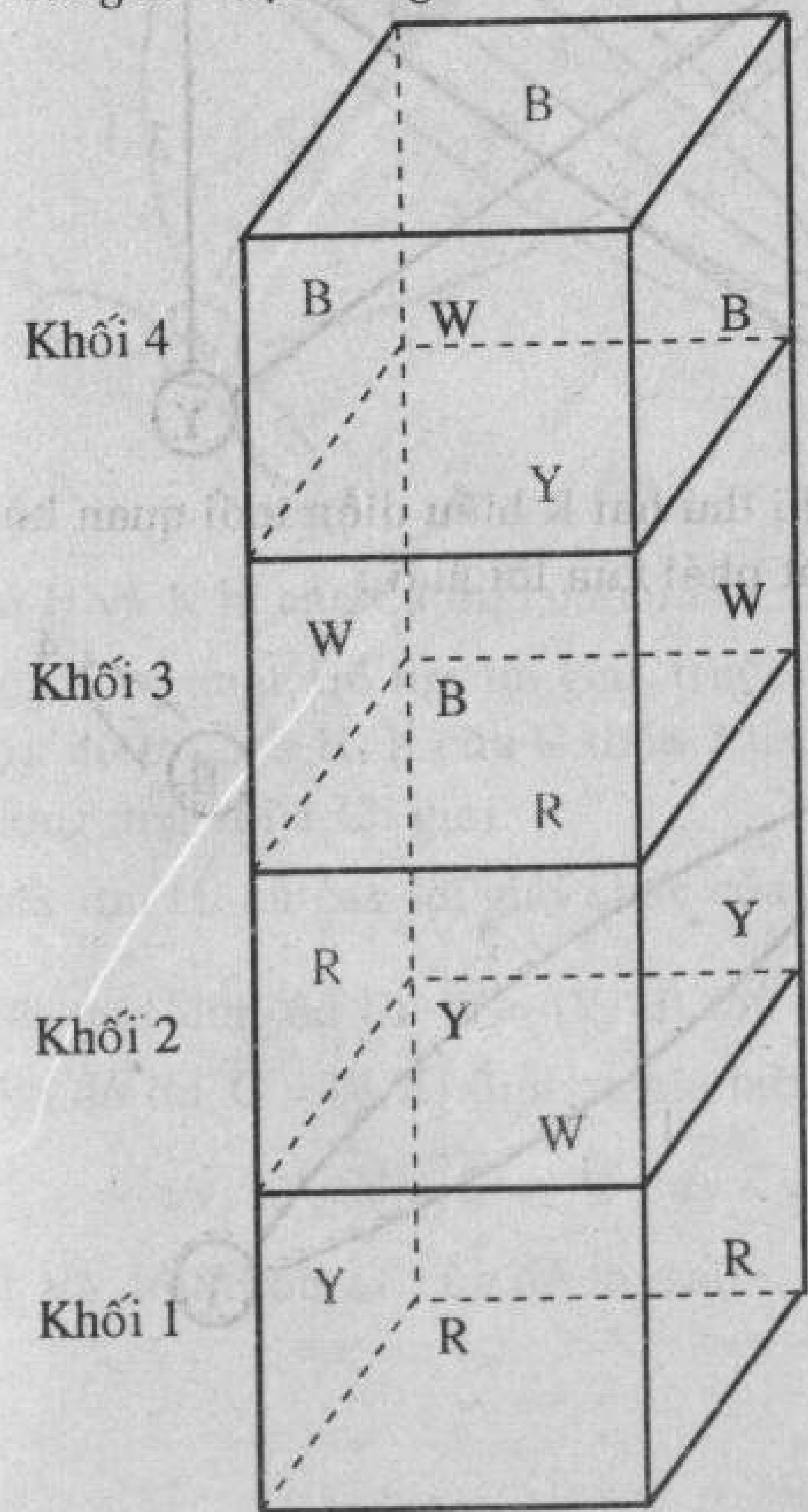
G có mấy thành phần ?

12. *(Instant Insanity Puzzle)*

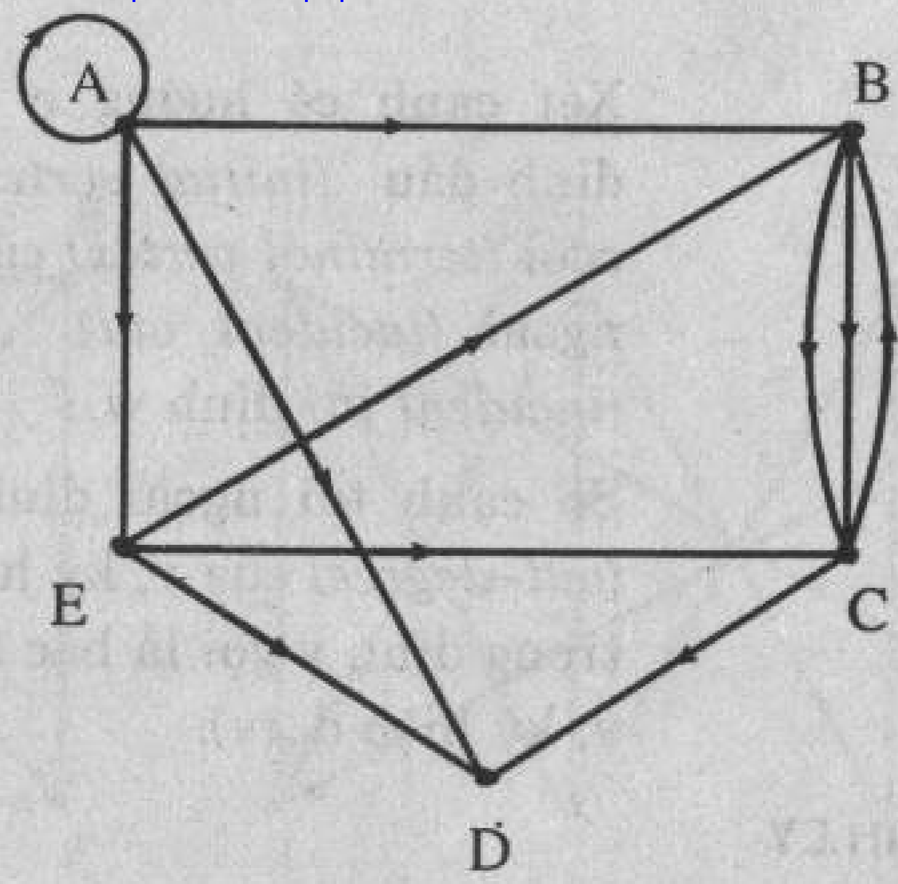
Có 4 khối lập phương, mỗi mặt của các khối này được tô bằng một trong 4 màu :đỏ (R), xanh (B), vàng (Y), trắng (W)



Tìm cách xếp 4 khối này thành một hình hộp, khối này nằm trên khối kia sao cho trên mỗi mặt xung quanh của hình hộp đều xuất hiện đủ 4 màu. Hiển nhiên, tùy theo cách tô màu 4 khối lập phương mà bài toán có thể không có lời giải hoặc cũng có thể có nhiều lời giải.



(Hình a)



có ma trận liên kết là :

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \square$$

1.8.2 ĐỊNH LÝ

Tổng số các phần tử trên hàng (cột) thứ i của ma trận liên kết của đồ thị có hướng G bằng bậc ngoài (trong) của đỉnh v_i, nghĩa là :

$$d_{out}(v_i) = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} \quad \text{và} \quad d_{in}(v_i) = \sum_{k=1}^{n} m_{ki}$$

CHỨNG MINH: Hiển nhiên. □

Một đường trong 1 đồ thị có hướng G là một dãy hữu hạn các đỉnh $v_0v_1 \ldots v_k$ sao cho $\overrightarrow{v_{i-1}v_i}$ là các cạnh đôi một khác nhau của G.

Một chu trình trong G là một đường trong G có dạ[redacted] $v_0v_1 \ldots v_{k-1}v_0$.

Một đồ thị có hướng G gọi là liên thông mạnh *(strongly connected)* nếu với mọi cặp đỉnh phân biệt v, w luôn luôn tồn tại 1 đường nối v với w.

Đồ thị có hướng G gọi là liên thông nếu đồ thị vô hướng tương ứng của nó là liên thông.

Một đồ thị có hướng G gọi là đầy đủ nếu đồ thị vô hướng tương ứng của nó là đầy đủ.

■ BÀI TẬP

Trừ bài tập 16, đồ thị nói đến trong tất cả các bài tập còn lại đều là vô hướng.

1. Vẽ 1 đơn đồ thị có 4 đỉnh với bậc các đỉnh là 3, 2, 2, 1.

2. Vẽ 1 đơn đồ thị mà mọi đỉnh của nó đều có bậc là k ($1 \le k \le 5$).

3. Có bao nhiêu đồ thị cùng nhận $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ là tập hợp đỉnh và thỏa điều kiện :

a) là đơn đồ thị.

b) không có vòng và có nhiều nhất 2 cạnh song song giữa mỗi cặp đỉnh.

c) có nhiều nhất 1 vòng tại mỗi đỉnh và không có cạnh song song.

d) là đơn đồ thị và tập hợp cạnh $\subset \{\overline{ij} \mid 1 \le i, j \le n, i + j \text{ lẻ}\}$

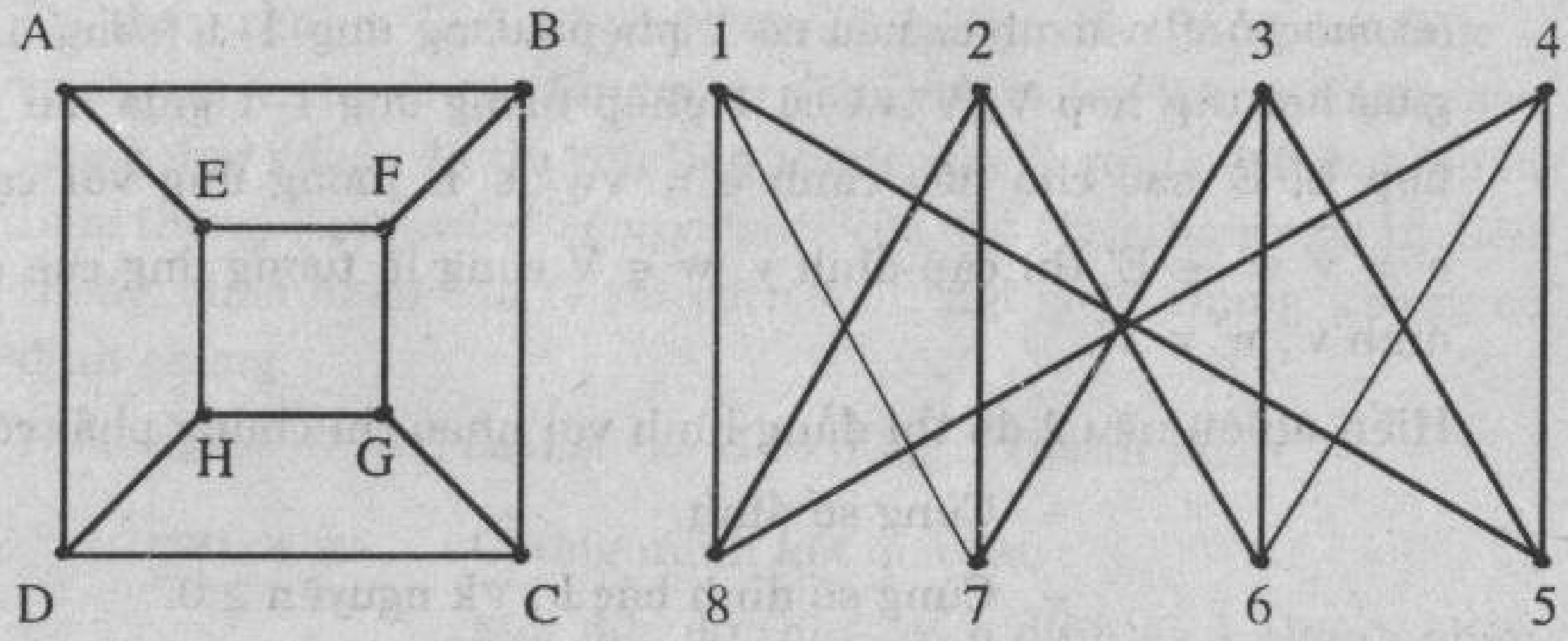
4. Vẽ đơn đồ thị có 6 đỉnh , trong đó có :

a) 3 đỉnh bậc 3 và 3 đỉnh bậc 1.

b) bậc các đỉnh là 1, 2, 3, 3, 4, 5.

c) bậc các đỉnh là 2, 2, 4, 4, 4, 4.

b)

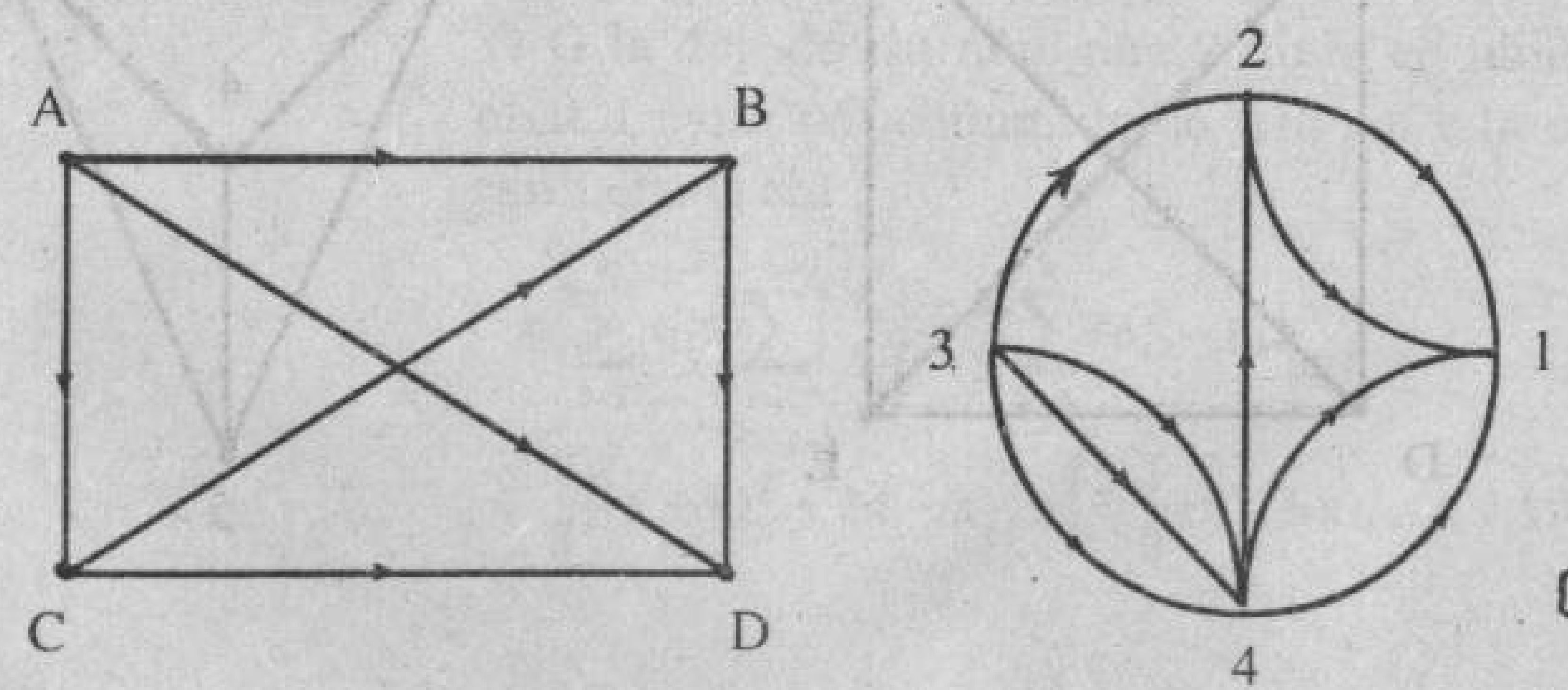


1.8 ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG

Đồ thị như đã định nghĩa ở trên gọi là đồ thị vô hướng *(undirected graph)*. Nếu bây giờ, mỗi cạnh $e \in E$ được cho tương ứng với 1 cặp thứ tự (v, w) của 2 đỉnh $v, w \in V$ thì ta nói e là 1 cạnh có hướng từ v đến w, ký hiệu $e = \overrightarrow{vw}$, và đồ thị nhận được gọi là một đồ thị có hướng *(directed graph)*.

Biểu đồ của đồ thị có hướng cũng giống như biểu đồ của đồ thị vô hướng, trong đó trên đoạn biểu diễn cạnh có hướng $\overrightarrow{vw}$, ta vẽ thêm 1 mũi tên theo chiều từ v đến w.

THÍ DỤ 8: Sau đây là biểu đồ của vài đồ thị có hướng:



□

Xét cạnh có hướng $e = \overrightarrow{vw}$. Đỉnh v gọi [redacted] đỉnh đầu *(initial vertex)* và đỉnh w là đỉnh cuối *(terminal vertex)* của e, ta nói cạnh e tới ngoài *(incident out)* đỉnh v và tới trong *(incident in)* đỉnh w.

Số cạnh tới ngoài đỉnh v gọi là bậc ngoài *(out-degree)* của v, ký hiệu $d_{out}(v)$; số cạnh tới trong đỉnh v gọi là bậc trong *(in-degree)* của v, ký hiệu $d_{in}(v)$.

1.8.1 ĐỊNH LÝ

Trong một đồ thị có hướng G, tổng các bậc trong và tổng các bậc ngoài của các đỉnh thì bằng nhau và cùng bằng số cạnh của G.

CHỨNG MINH: Hiển nhiên vì mỗi cạnh đều tới trong 1 đỉnh và tới ngoài 1 đỉnh. □

Một đồ thị có hướng gọi là cân bằng *(balanced)* nếu mọi đỉnh của nó đều có bậc trong và bậc ngoài bằng nhau.

Ma trận liên kết của một đồ thị có hướng G với thứ tự đỉnh là $v_1, v_2, \ldots, v_n$ là ma trận vuông $n \times n$

$$[m_{ij}]$$

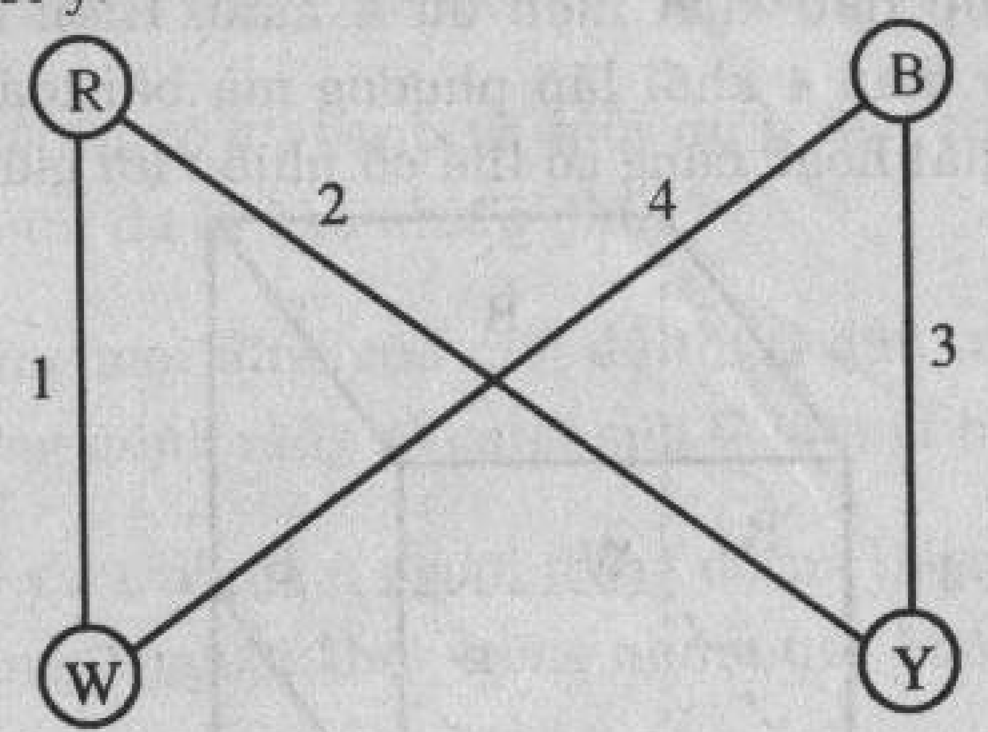
trong đó m_{ij} = số cạnh có đỉnh đầu là v_i và đỉnh cuối là v_j $(1 \le i, j \le n)$

THÍ DỤ 9: Đồ thị :

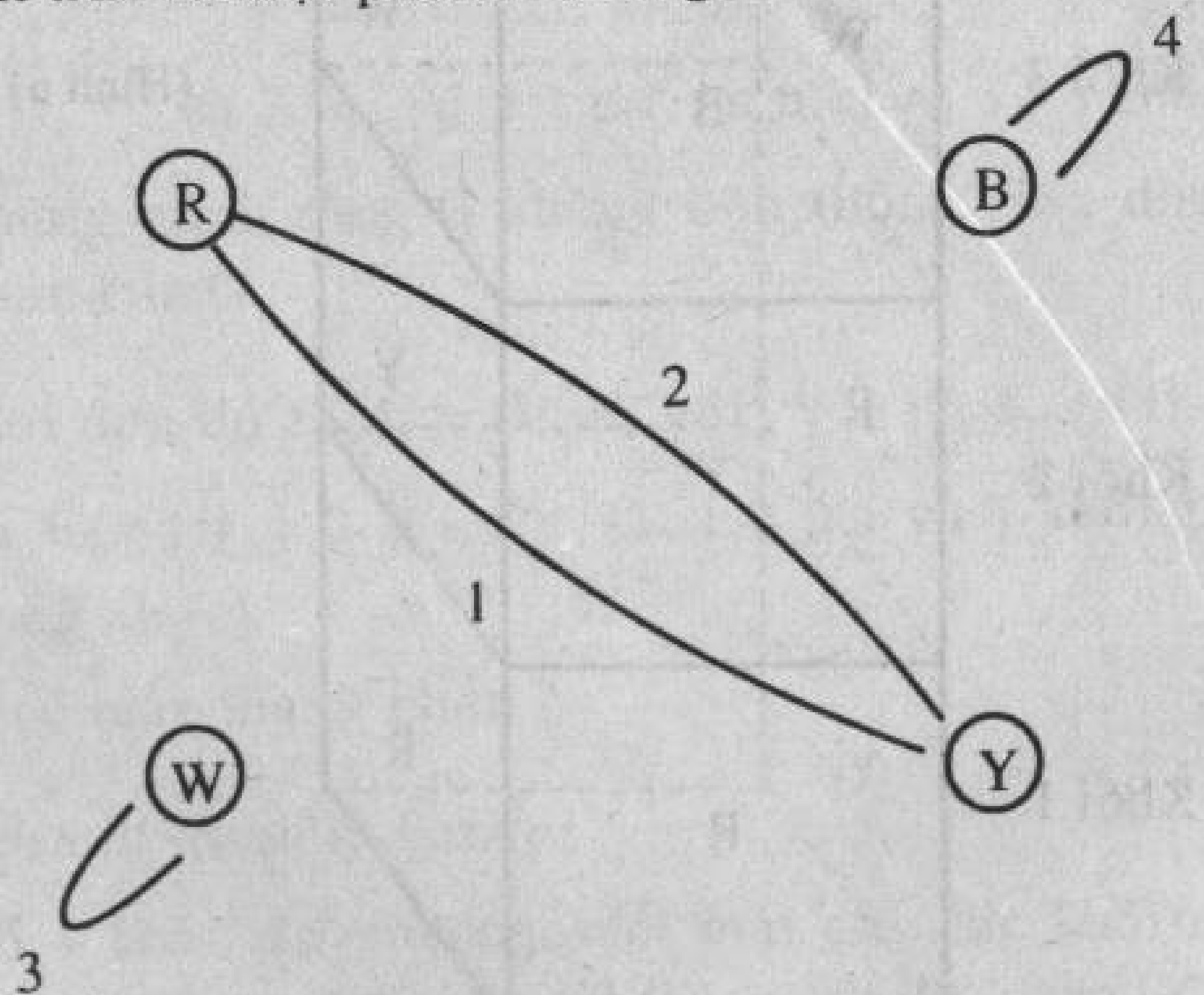
Giải bằng phương pháp thử sai là không khả thi vì có tất cả $3 \times 24^3 = 41472$ trường hợp phải kiểm tra. Tuy nhiên, ta có thể tìm ra mọi lời giải trong một thời gian ngắn bằng cách sau :

Xét 1 lời giải bất kỳ. Chẳng hạn : *(Hình a)*

Lời giải này tương ứng với 2 đồ thị,đồ thị thứ nhất H biểu diễn mối quan hệ về màu ở mặt trước và mặt sau của lời giải : đồ thị có 4 đỉnh là 4 màu, nếu khối lập phương i có màu của mặt trước và mặt sau là x và y thì có cạnh nhãn i nối x với y.



Tương tự, đồ thị thứ hai K biểu diễn mối quan hệ về màu ở mặt trái và mặt phải của lời giải :



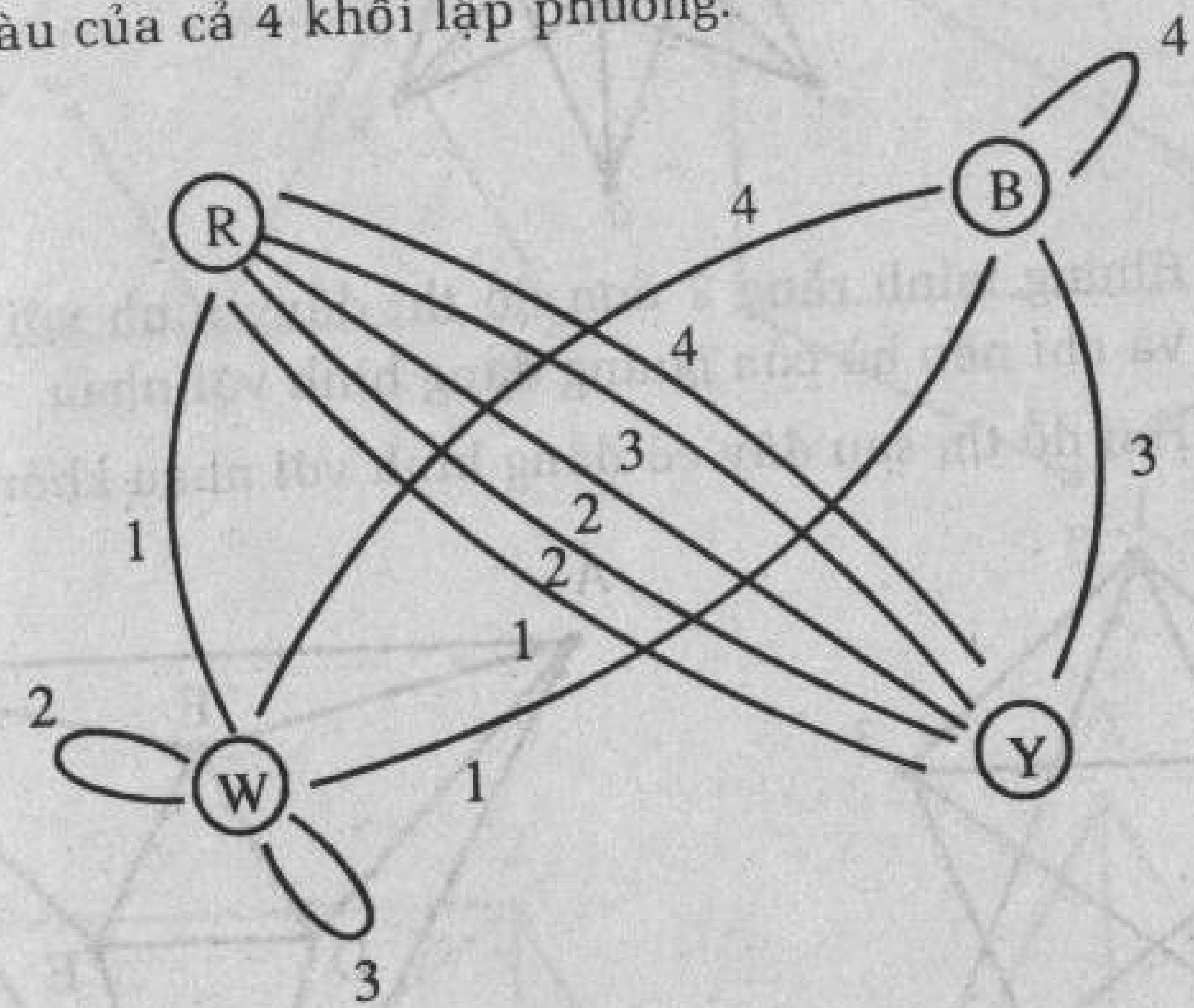
Hai đồ thị này thỏa 3 tính chất sau :

(i) Mỗi đỉnh đều có bậc là 2.

(ii) Có 4 cạnh mang nhãn lần lượt là 1, 2, 3, 4.

(iii) Hai đồ thị không có cạnh chung.

Mặt khác nếu gọi G là đồ thị biểu diễn mối quan hệ về màu của cả 4 khối lập phương.



thì H và K là các đồ thị con của G.

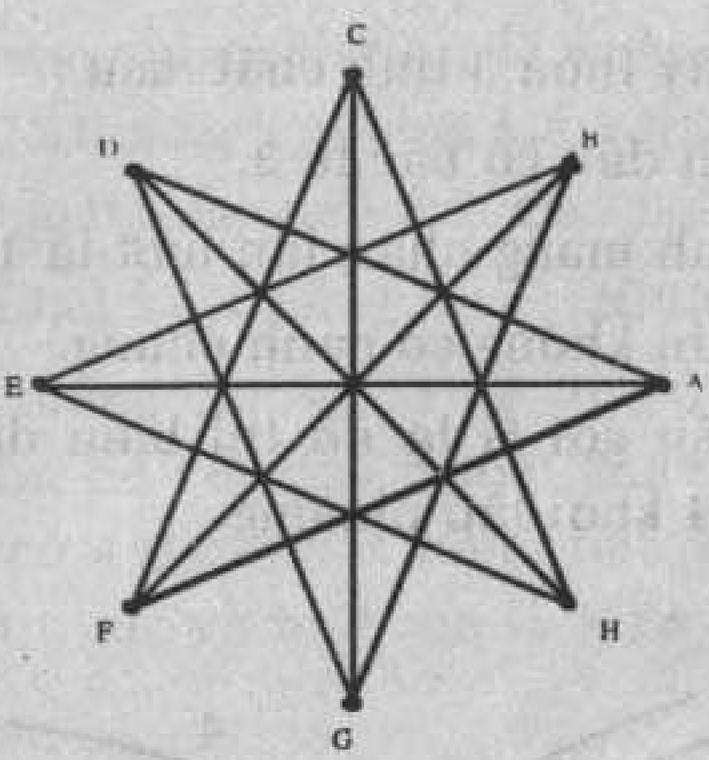
Vậy tổng quát, để tìm lời giải, trước hết ta vẽ đồ thị G. Mỗi cặp đồ thị con H, K của G thỏa 3 tính chất (i)–(iii) nêu trên tương ứng với 1 lời giải.

Hãy tìm tất cả các lời giải khác của bài toán cụ thể trên.

13. Xét một đơn đồ thị G = (V, E). Bù *(complement)* của G là đơn đồ thị $\overline{G} = (V, \overline{E})$ định nghĩa bởi:

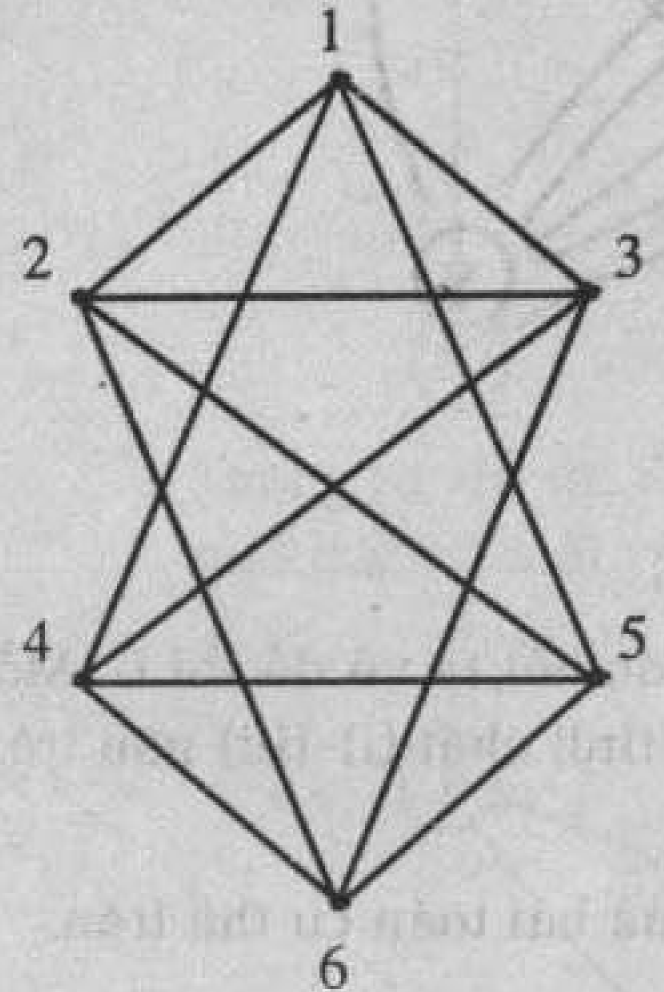
$$\forall v, w \in V,\ \overline{vw} \in \overline{E} \iff \overline{vw} \notin E$$

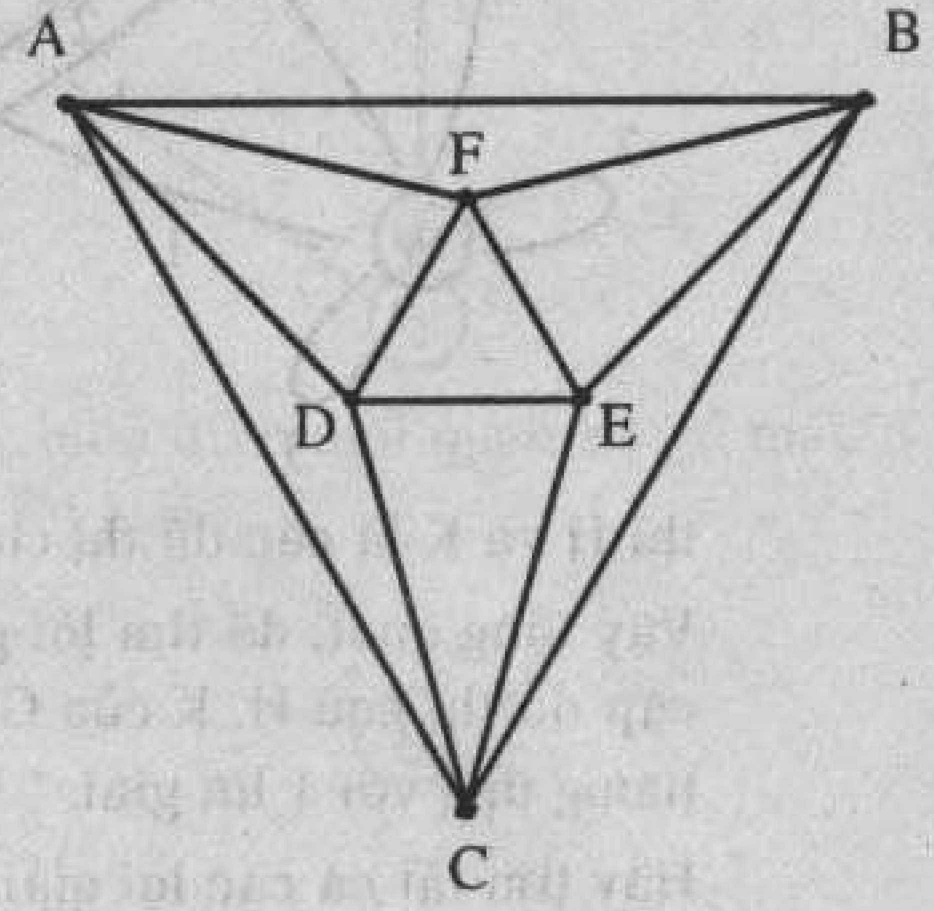
a) Vẽ đồ thị bù $\overline{G}$ của đồ thị sau :



b) Chứng minh rằng 2 đơn đồ thị đẳng hình với nhau nếu và chỉ nếu bù của chúng đẳng hình với nhau.

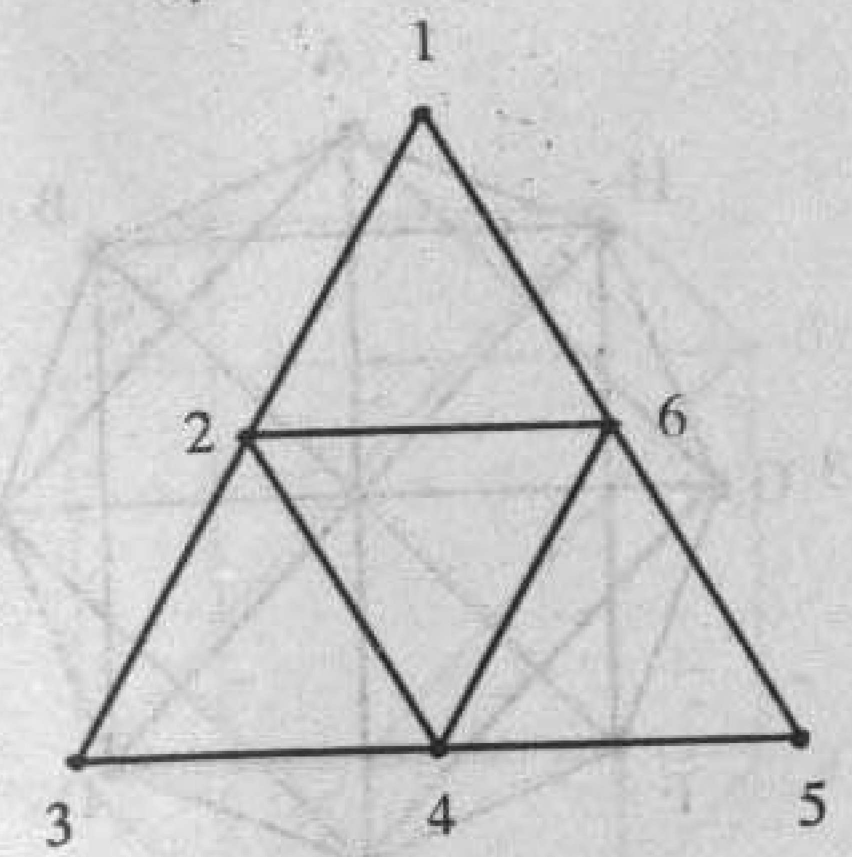
c) Hai đồ thị sau đây có đẳng hình với nhau không ?

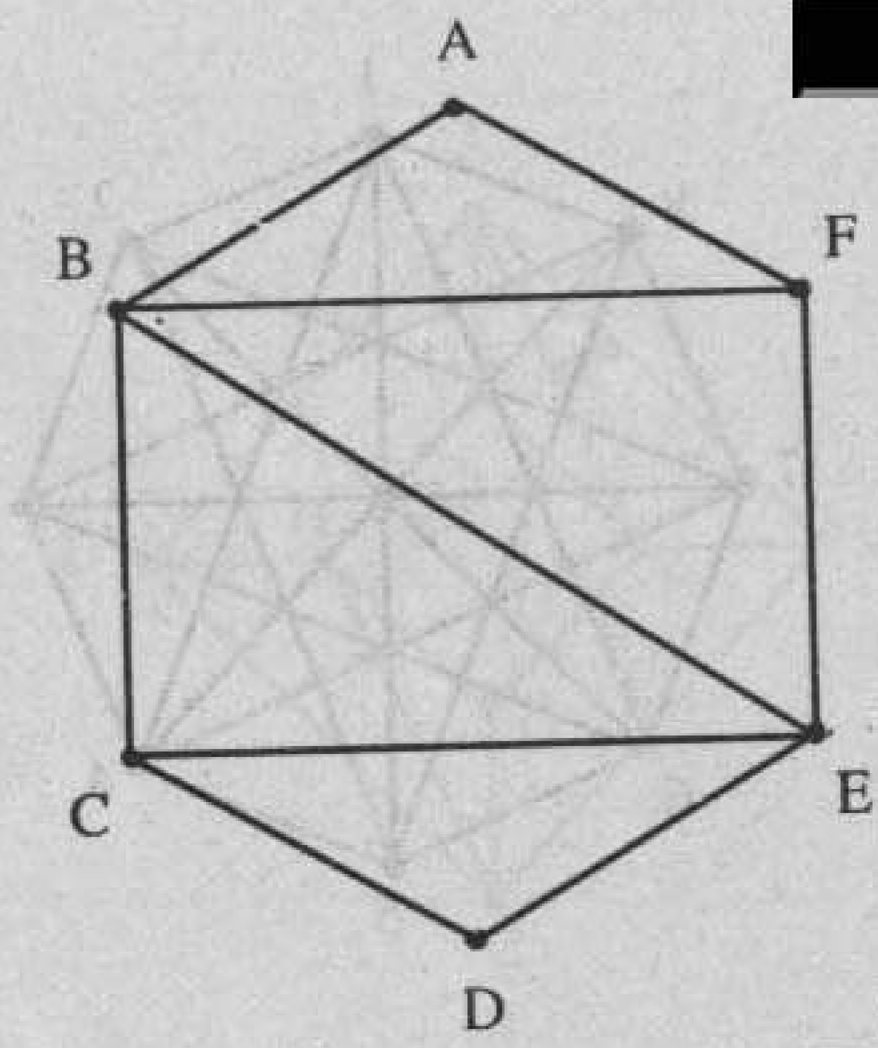




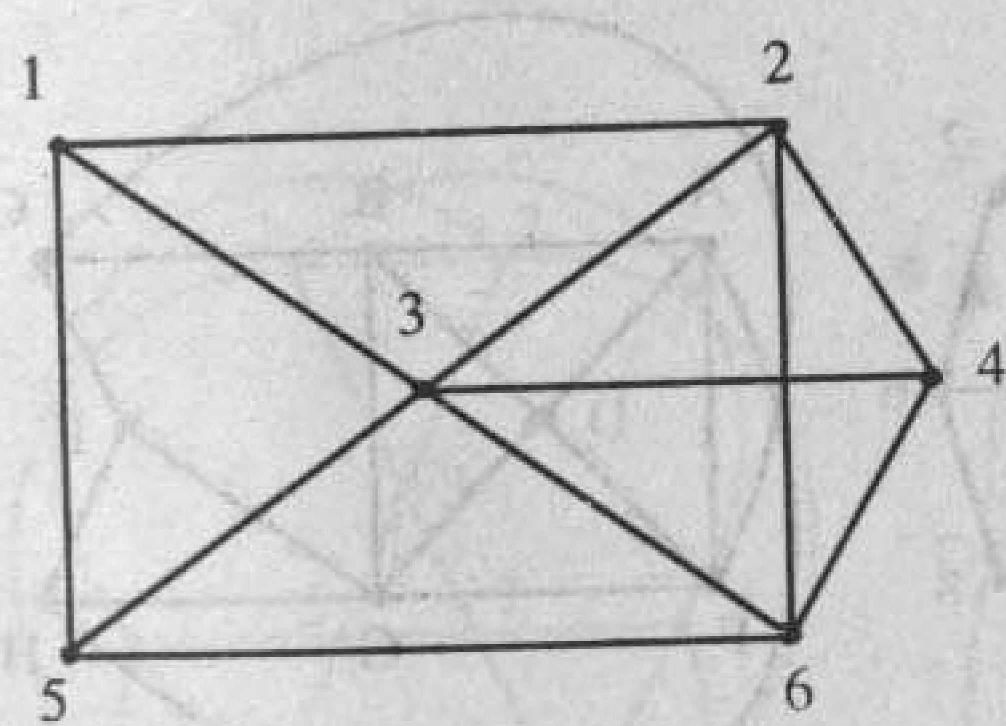
14. Các cặp đồ thị sau có đẳng hình với nhau không ? Giải thích.

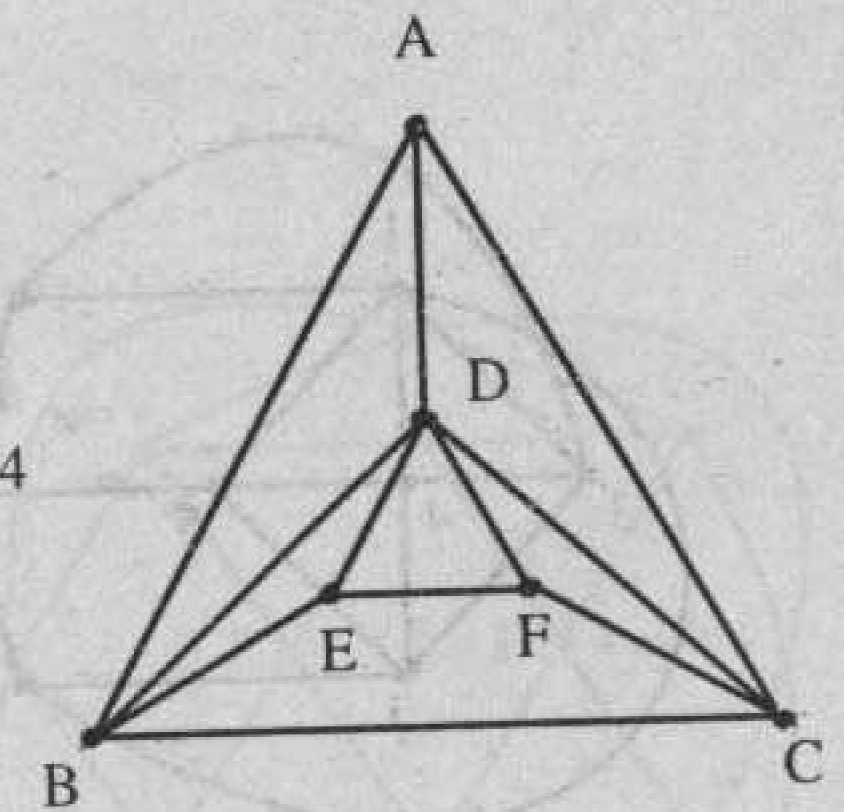
a)





b)





- $\forall i = 1,\ldots,k-1,\ \overrightarrow{v_i x} \in E$

$$\Rightarrow \overrightarrow{xv_{i+1}} \notin E \Rightarrow \overrightarrow{v_{i+1}x} \in E \qquad (2)$$

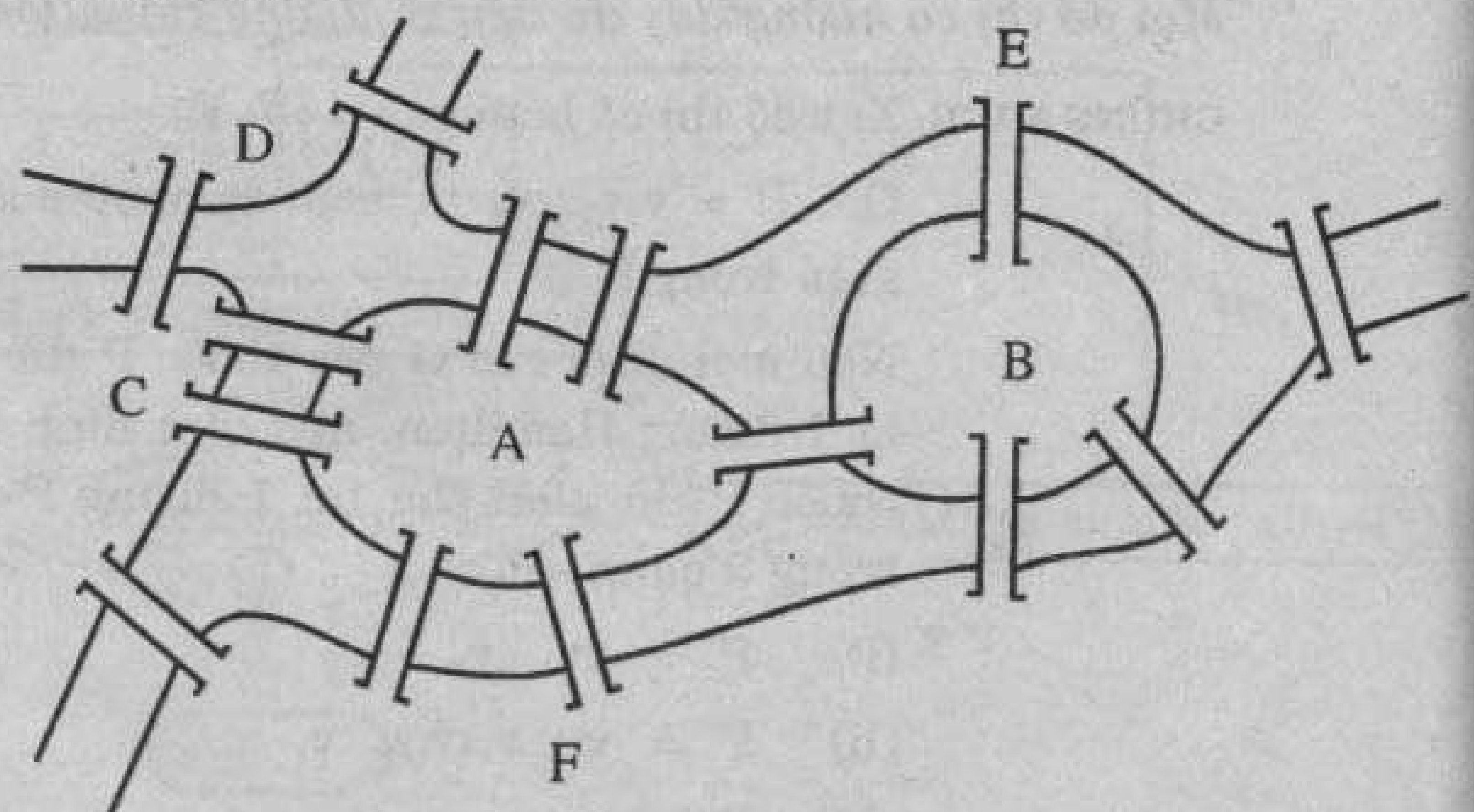
(1) và (2) cho $\overrightarrow{v_k x} \in E$

Vậy tồn tại đường P' ở dạng (iii).

Như thế, bắt đầu bằng một đường gồm 1 đỉnh, ta có thể mở rộng dần thành một đường mới chứa nhiều đỉnh hơn đường cũ và vẫn chỉ đi qua mỗi đỉnh không quá 1 lần, cứ thế cuối cùng ta sẽ có đường Hamilton. □

■ BÀI TẬP

1. Xem hình vẽ sau tương tự hình vẽ của bài toán 7 cầu ở Königsburg :



a) Vẽ đồ thị G tương ứng.

b) G có chu trình Euler hoặc đường Euler không ? Tại sao?

2. Tìm chu trình Euler hoặc đường Euler (nếu có) của đồ thị với ma trận liên kết sau :

a)

$$\begin{array}{c|cccccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 0 & & 1 & & & & 1 & & & & \\ 1 & 1 & & 1 & & & 1 & & 1 & & \\ 2 & & 1 & & 1 & & & & 1 & 1 & \\ 3 & & & 1 & & 1 & & & & 1 & 1 \\ 4 & & & & 1 & & 1 & & & & \\ 5 & 1 & 1 & & & 1 & & 1 & & & \\ 6 & & & & & & 1 & & 1 & & \\ 7 & & 1 & 1 & & & & 1 & & 1 & \\ 8 & & & 1 & 1 & & & & 1 & & 1 \\ 9 & & & & 1 & & & & & 1 & \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\ 2 & 1 & & & 1 & & & \\ 3 & & 1 & & 1 & & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 \\ 5 & & 1 & & 1 & & 1 & 1 \\ 6 & & & 1 & 1 & 1 & & 1 \\ 7 & & & 1 & 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

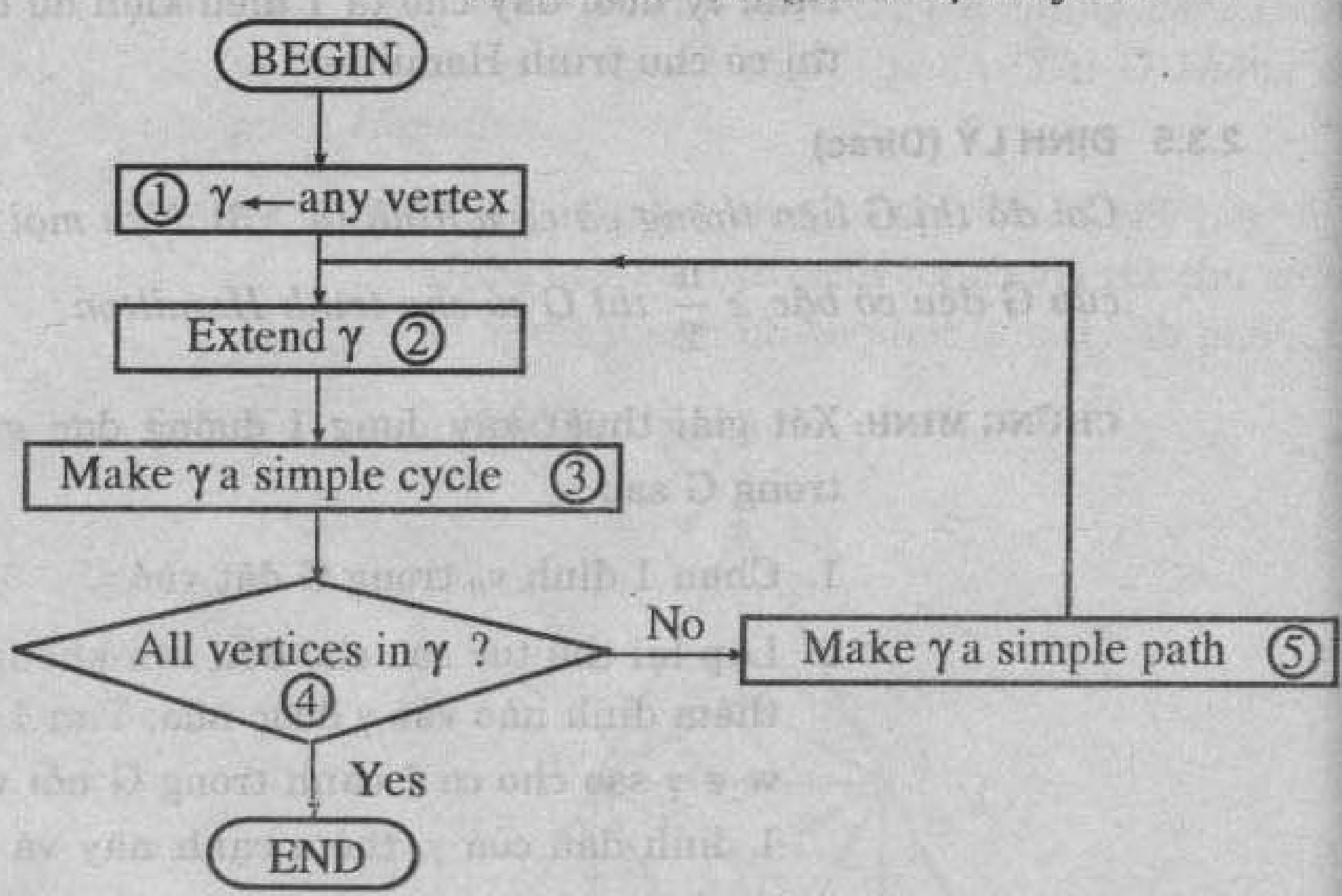
c)

$$\begin{array}{c|ccccccc} & A & B & C & D & E & F & G \\ \hline A & & 1 & 1 & & 1 & 1 & \\ B & 1 & & 1 & & & 1 & \\ C & 1 & 1 & & 1 & & 1 & \\ D & & & 1 & & 2 & & 1 \\ E & 1 & & & 2 & & 1 & \\ F & 1 & 1 & 1 & & 1 & & \\ G & & & & 1 & & & \end{array}$$

a = uu' trong $\gamma = v_1...uu'....v_2$ với tính chất là tồn tại các cạnh trong G là b = $\overline{v_1u'}$, c = $\overline{uv_2}$, thêm các cạnh b, c vào γ và loại bỏ cạnh a khỏi γ.

4. Nếu mọi đỉnh của G đều nằm trong γ thì dừng.
5. Nếu không, thực hiện thủ tục sau để biến đổi γ thành 1 đường đơn giản: tìm 1 cạnh $\overline{vw}$ trong G sao cho $v \in \gamma$ và $w \notin \gamma$. Loại bỏ 1 cạnh tới v trong γ và thêm cạnh $\overline{vw}$ vào γ. Trở về bước 2.

Sơ đồ khối của giải thuật này là :



Nhận xét rằng γ luôn luôn là 1 đường đơn **giản hoặc chu trình đơn giản** ở mọi bước của giải thuật.

Ta chỉ cần chứng minh là bước 3 và bước 5

của giải thuật luôn luôn thực hiện đượ[redacted] thấy do tính chất liên thông của G nên [redacted] 5 thực hiện được.

Xét bước 3. Giả sử $\gamma = v_1...uu'...v_2$, và không thể mở rộng γ ở đầu v_1 cũng như v_2, nghĩa là không có cạnh nào nối v_1 hoặc v_2 với 1 đỉnh ở ngoài γ. Hơn nữa giả sử cũng không có cạnh nào nối v_1 với v_2. Đặt $|\gamma| = k$.

Nếu với mọi $\overline{uu'}$ trên γ, không có đồng thời trong G 2 cạnh $\overline{v_1u'}$ và $\overline{uv_2}$ thì phải có :

$$d(v_1) + d(v_2) \le k - 1 < n$$

Vô lý vì $d(v_1) + d(v_2) \ge \dfrac{n}{2} + \dfrac{n}{2} = n$ □

2.3.6 ĐỊNH LÝ (König)

Mọi đồ thị có hướng đầy đủ đều có đường Hamilton.

CHỨNG MINH: Xét đồ thị có hướng G = (V, E)

Gọi $P = v_1v_2...v_k$ ($k \ge 0$) là một đường đơn giản trong G.

Nếu mọi đỉnh của G đều thuộc P thì P chính là 1 đường Hamilton, nếu có 1 đỉnh x không thuộc P thì phải tồn tại 1 đường P' thuộc 1 trong 3 dạng sau :

(i) $P' = xv_1...v_k$

(ii) $P' = v_1...v_ixv_{i+1}...v_k$

(iii) $P' = v_1...v_kx$

Thực vậy, nếu trong G không có đường nào có dạng (i) hoặc (ii) thì ta có :

- $\overrightarrow{xv_1} \notin E$ và do đó $\overrightarrow{v_1x} \in E$ (1)

Vậy G không có chu trình Hamilton.

Lưu ý rằng đồ thị này có đường Hamilton là DEGJFBACHK. □

2.3.3 ĐỊNH LÝ

Mọi đồ thị đầy đủ đều có chu trình Hamilton.

CHỨNG MINH: Hiển nhiên. □

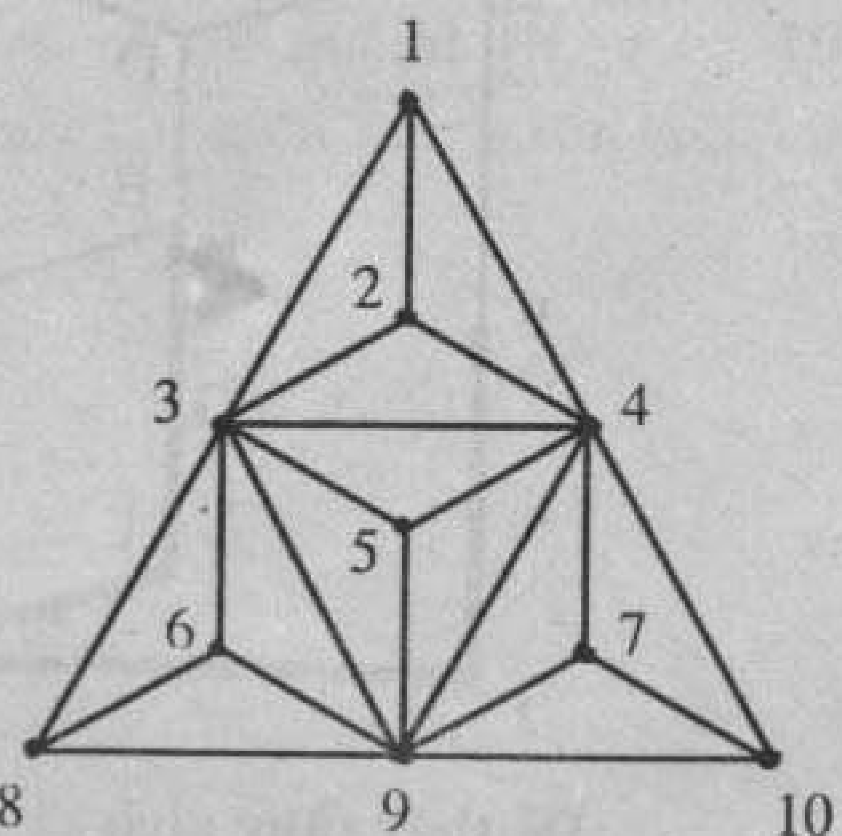
Để chứng minh một đồ thị không có chu trình Hamilton, ta có thể dùng kết quả sau :

2.3.4 ĐỊNH LÝ

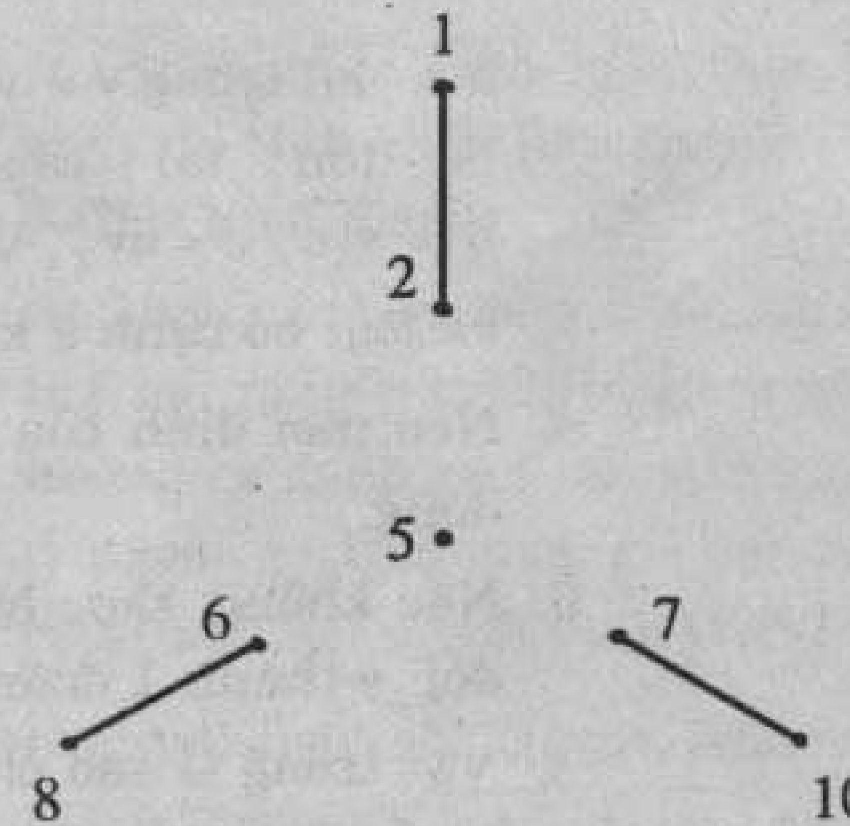
Cho 1 đồ thị G. Giả sử có k đỉnh của G sao cho nếu xóa k đỉnh này cùng với các cạnh liên kết với chúng khỏi G thì đồ thị nhận được có hơn k thành phần. Thì G không có chu trình Hamilton.

CHỨNG MINH: Nhận xét rằng trong 1 chu trình, nếu hủy đi k đỉnh cùng với các cạnh tới chúng thì chu trình sẽ bị cắt thành nhiều nhất là k thành phần. □

THÍ DỤ 5: Xét đồ thị G sau :



Nếu hủy đi 3 đỉnh 3, 4, 9 cùng với các cạnh tới chúng thì ta còn lại đồ thị sau :



Đồ thị này có 4 thành phần. Vậy G không có chu trình Hamilton. □

Định lý dưới đây cho ta 1 điều kiện đủ để đồ thị có chu trình Hamilton.

2.3.5 ĐỊNH LÝ (Dirac)

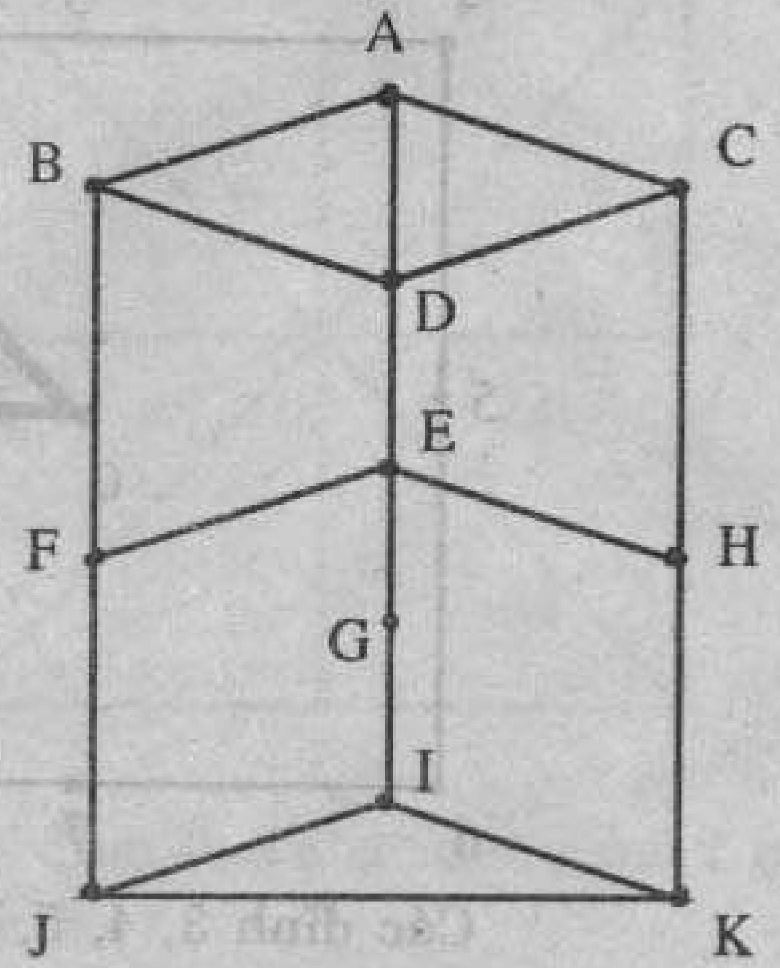
Coi đồ thị G liên thông và có n đỉnh ($n \geq 3$). Nếu mọi đỉnh của G đều có bậc $\geq \frac{n}{2}$ thì G có chu trình Hamilton.

CHỨNG MINH: Xét giải thuật xây dựng 1 đường đơn giản γ trong G sau :

1. Chọn 1 đỉnh v_0 trong G đặt vào γ.
2. Lập lại thủ tục sau cho đến khi không thể thêm đỉnh nào vào γ được nữa: Tìm 1 đỉnh $w \notin \gamma$ sao cho có 1 cạnh trong G nối w với 1 đỉnh đầu của γ, thêm cạnh này và đỉnh w vào γ.
3. Thực hiện thủ tục sau để biến đổi γ thành 1 chu trình đơn giản:

   Nếu có cạnh nối 2 đỉnh đầu của γ thì thêm cạnh này vào γ', nếu không, tìm 1 cạnh chứa 2 cạnh tới đỉnh 0 tạo với nhau góc 45^0. □

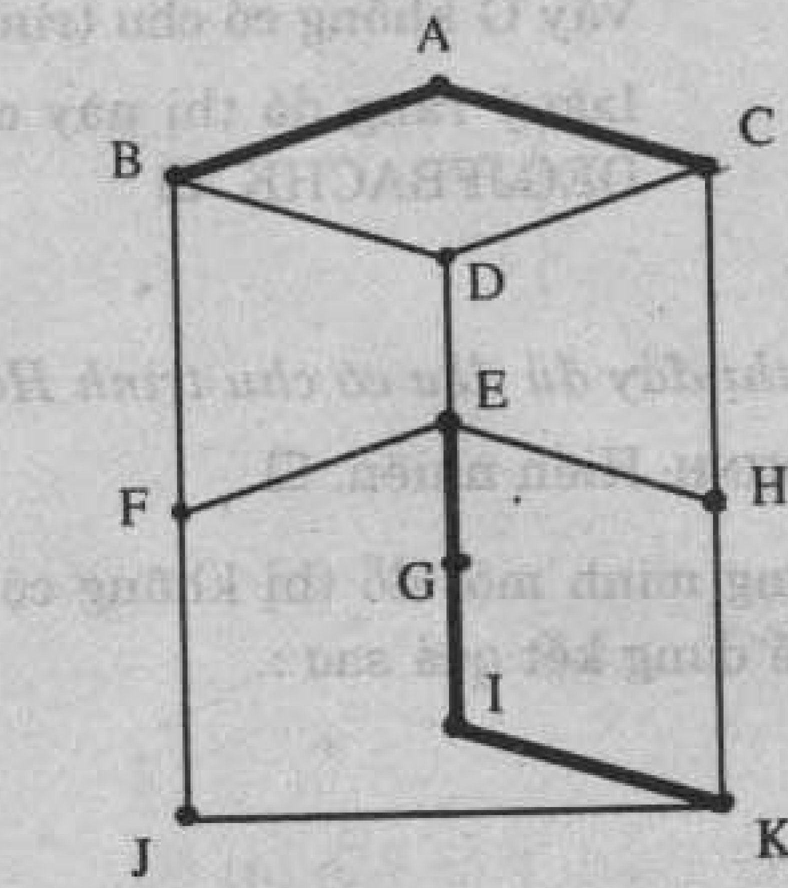
THÍ DỤ 4: Chứng minh rằng đồ thị G sau đây không có chu trình Hamilton.



Giả sử G có 1 chu trình Hamilton là (γ).

Vì d(A) = d(G) = 2 nên (γ) phải chứa các cạnh $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{GE}$ và $\overline{GI}$.

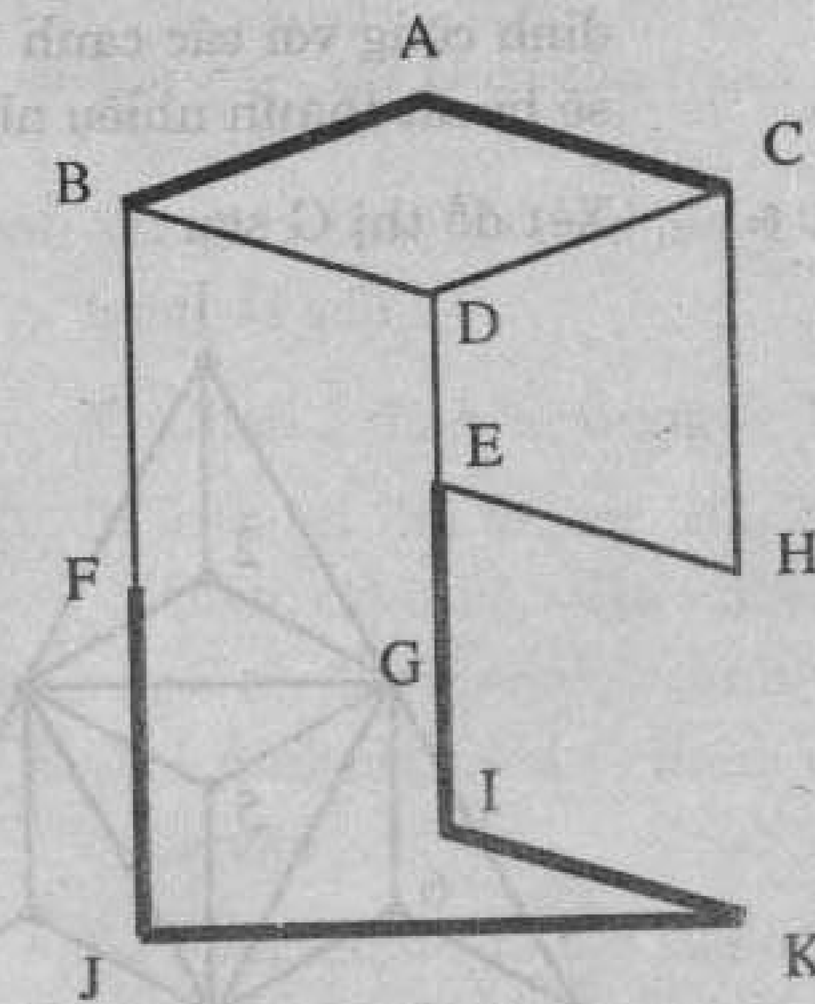
Xét đỉnh I. Do tính chất đối xứng của hình vẽ, có thể giả sử $\overline{IK} \in (\gamma)$. Dùng qui tắc 4 xóa bớt cạnh $\overline{IJ}$, ta còn lại đồ thị :



Đỉnh J bây giờ trở thành bậc 2, vậy $\overline{JF}$ và $\overline{JK} \in (\gamma)$.

Xóa tiếp được cạnh $\overline{KH}$. Ngoài ra cũng xóa được cạnh $\overline{FE}$ (do qui tắc 3).

Đồ thị bây giờ trở thành :

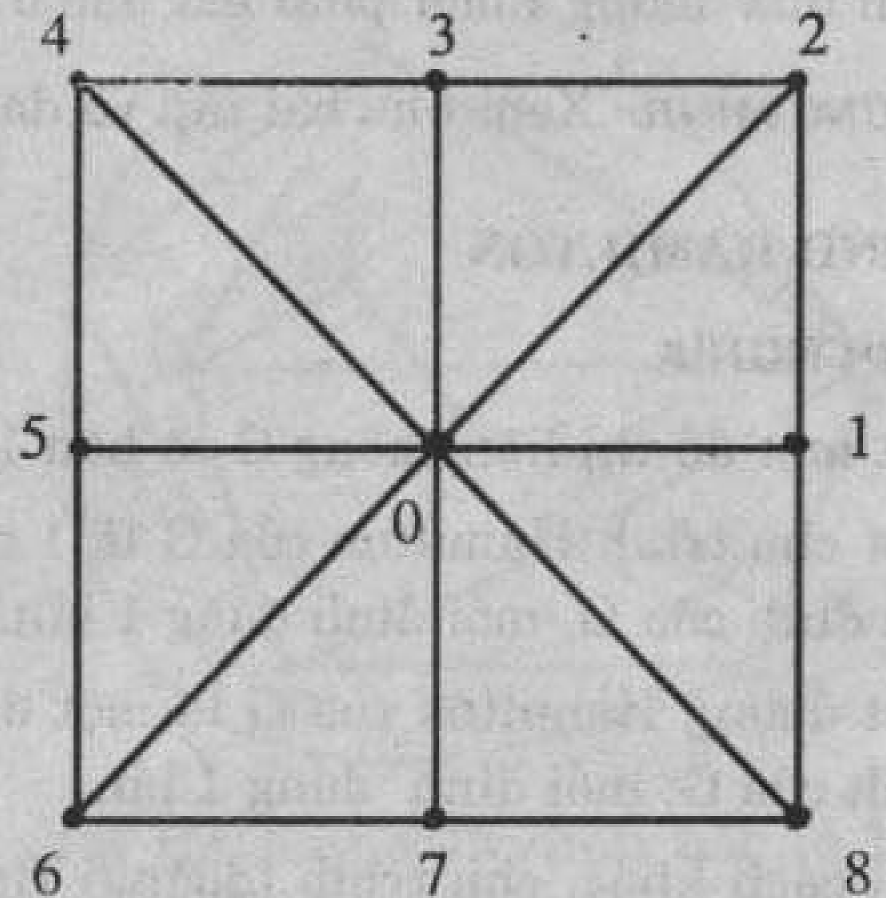


Dễ thấy rằng phải có $\overline{FB}, \overline{HE}, \overline{HC} \in (\gamma)$.

Ta nhận được 1 chu trình con thực sự trong (γ) : vô lý.

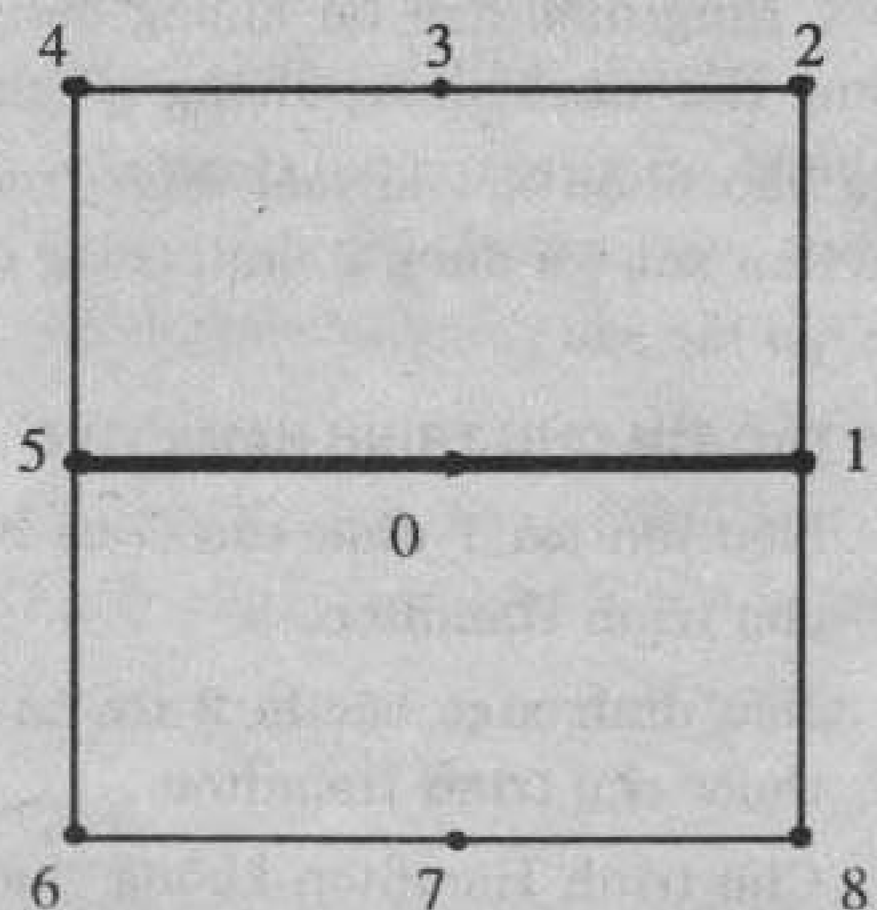
nữa, do đó có thể xóa mọi cạnh còn lại tới x.

THÍ DỤ 3: Tìm chu trình Hamilton của đồ thị sau :



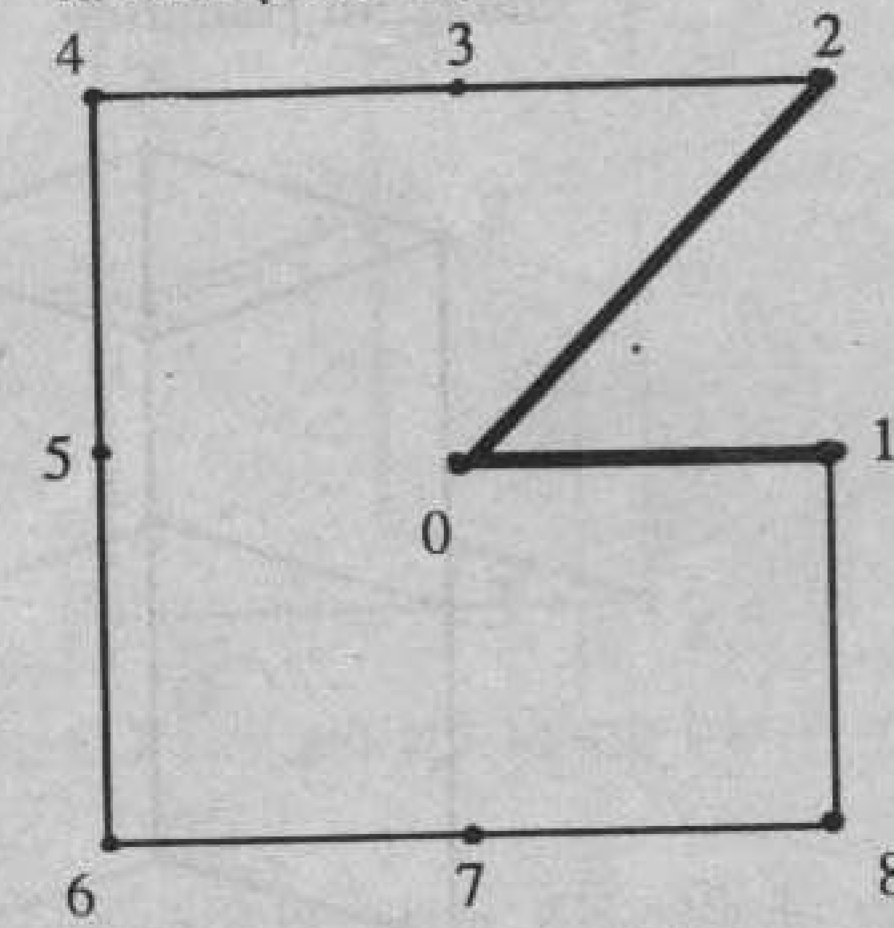
Xét đỉnh 0. Ta có thể chọn 2 cạnh tới đỉnh này là :

a) $\overline{01}$ và $\overline{05}$: Xóa các cạnh tới 0 khác (theo qui tắc 4) ta còn lại đồ thị :

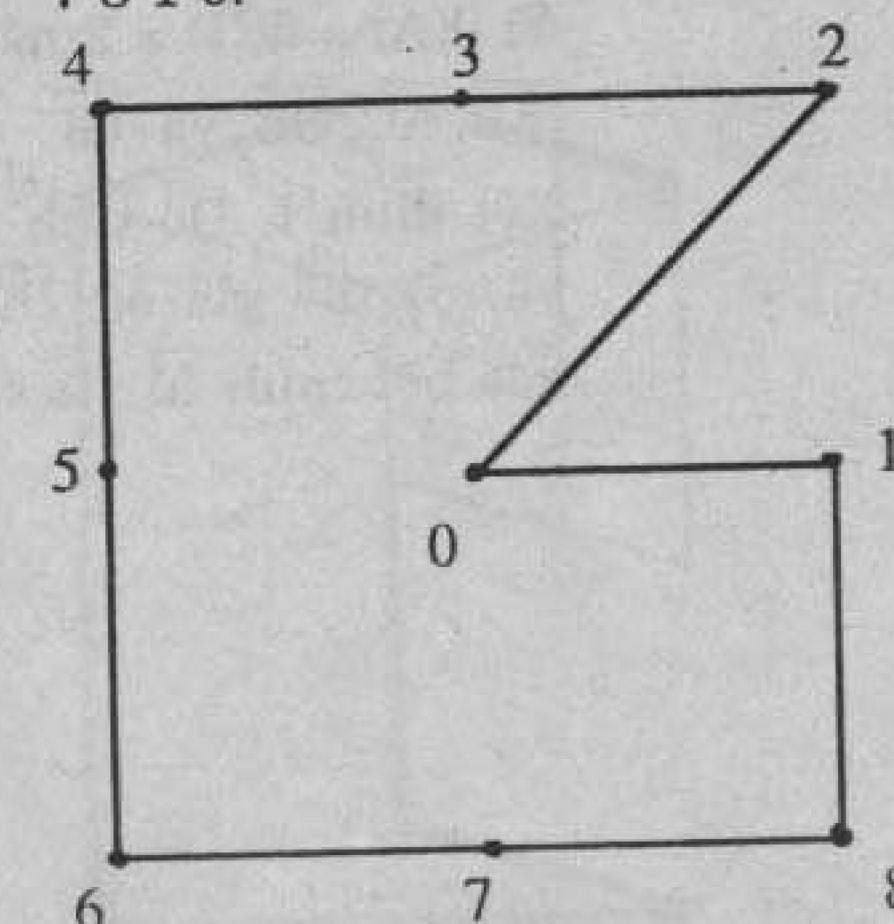


Các đỉnh 2, 3, 4 còn lại bậc 2. Vậy phải lấy các cạnh $\overline{12}$, $\overline{23}$, $\overline{34}$, $\overline{45}$ nhưng như vậy tạo ra chu trình con thực sự : vô lý.

b) $\overline{01}$ và $\overline{02}$: Xóa các cạnh tới 0 khác (th
qui tắc 4) và xóa cạnh $\overline{12}$ (theo qui tắc 3
ta còn lại đồ thị :



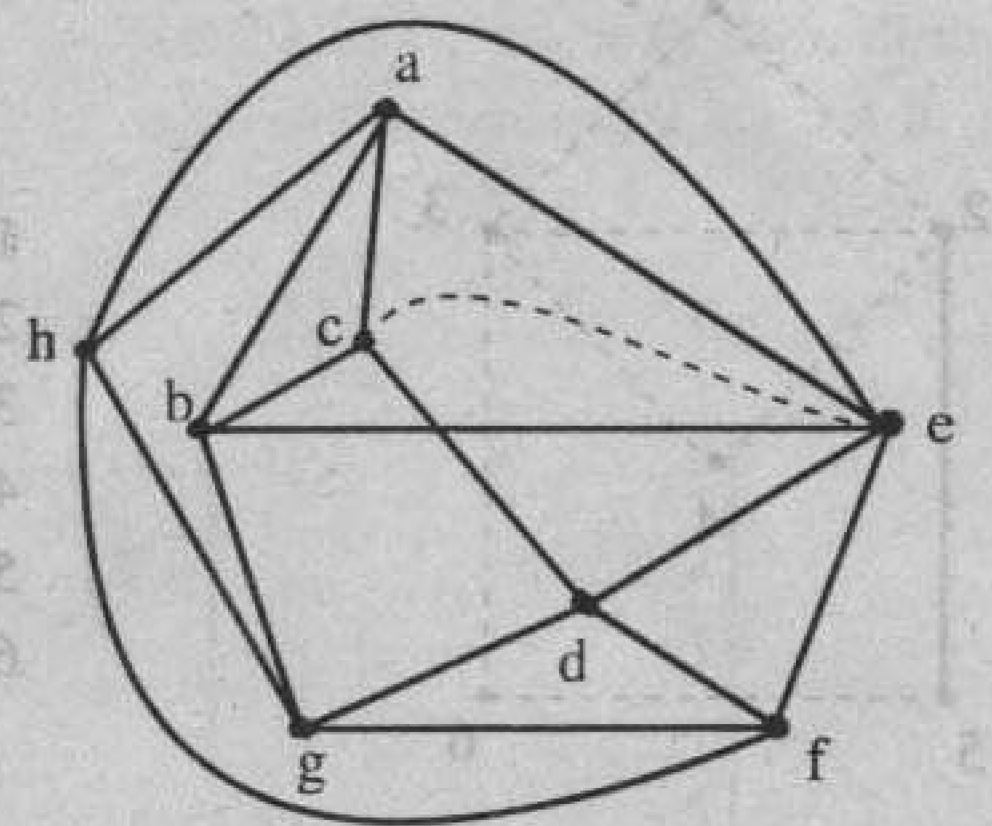
Các đỉnh 3, 4, 5, 6, 7, 8 còn lại bậc 2 ta nhận được chu trình Hamilton: 0 2 3 4 5 6 7 8 1 0.



c) Lập luận tương tự, các trường hợp chọn $\overline{01}$ và $\overline{03}$, $\overline{01}$ và $\overline{04}$ đều không được.

Tóm lại mọi chu trình Hamilton của G đều phải

THÍ DỤ 2: Xét đồ thị G sau đây :



Đồ thị này có 2 đỉnh bậc lẻ là c và e, các đỉnh còn lại đều có bậc chẵn, vậy có đường Euler.

Vẽ thêm cạnh tưởng tượng nối c với e, ta được đồ thị G'.

Ta tìm được 1 chu trình Euler cho G' là gdcedfehabcaebgfhg.

Hủy cạnh tưởng tượng $\overline{ce}$ khỏi chu trình này ta nhận được 1 đường Euler của G: edfehabcaebgfhgdc. ☐

2.2.4 ĐỊNH LÝ EULER 3

Cho đồ thị có hướng G liên thông và có hơn 1 đỉnh. Thì G có chu trình Euler nếu và chỉ nếu G cân bằng.

CHỨNG MINH: Tương tự trường hợp vô hướng. ☐

2.2.5 ĐỊNH LÝ EULER 4

Cho đồ thị có hướng G liên thông và có hơn 1 đỉnh. Thì G có đường Euler nếu và chỉ nếu trong G có 2 đỉnh a, b thỏa :

$$d_{out}(a) = d_{in}(a) + 1$$

$$d_{in}(b) = d_{out}(b) + 1$$

và mọi đỉnh còn lại đều cân bằng.

Hơn nữa đường Euler phải bắt đầu ở a và kết thúc ở b.

CHỨNG MINH: Xem như bài tập và dành cho độc giả. ☐

2.3 CHU TRÌNH HAMILTON

2.3.1 ĐỊNH NGHĨA

Xét một đồ thị liên thông G có hơn 1 đỉnh.

Một chu trình Hamilton của G là 1 chu trình đi qua tất cả các đỉnh của G, mỗi đỉnh đúng 1 lần.

Một đường Hamilton của G là một đường đi qua tất cả các đỉnh của G, mỗi đỉnh đúng 1 lần.

Nói cách khác, chu trình (đường) Hamilton là 1 chu trình (đường) đơn giản đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị.

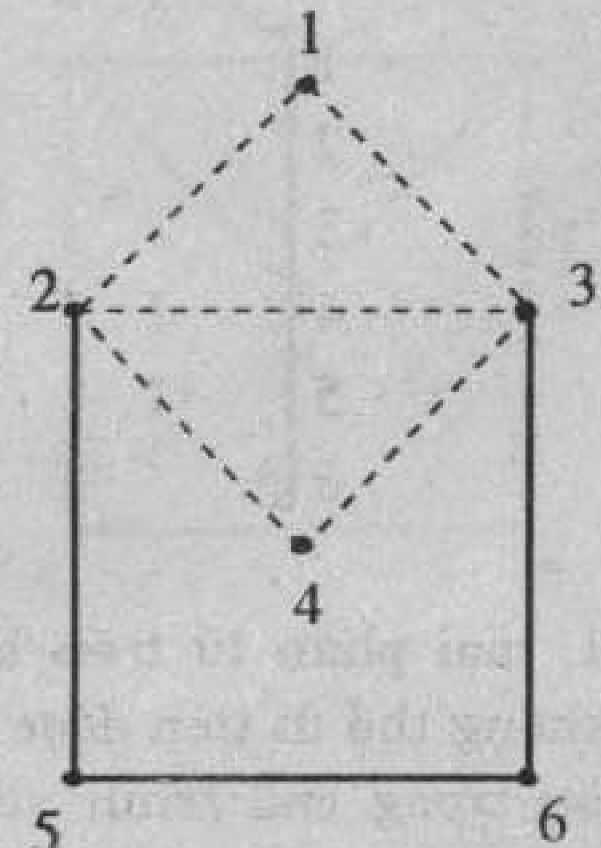
Hiển nhiên nếu G có chu trình Hamilton thì G cũng có đường Hamilton : ta chỉ cần hủy đi 1 cạnh trong chu trình Hamilton thì sẽ nhận được 1 đường Hamilton. Tuy nhiên lưu ý rằng điều đảo lại không đúng : có những đồ thị có đường Hamilton nhưng không có chu trình Hamilton.

Dựa vào nhận xét là mỗi đỉnh trong chu trình Hamilton đều liên kết với đúng 2 cạnh trong chu trình này, ta suy ra các qui tắc sau :

2.3.2 QUI TẮC TÌM CHU TRÌNH HAMILTON

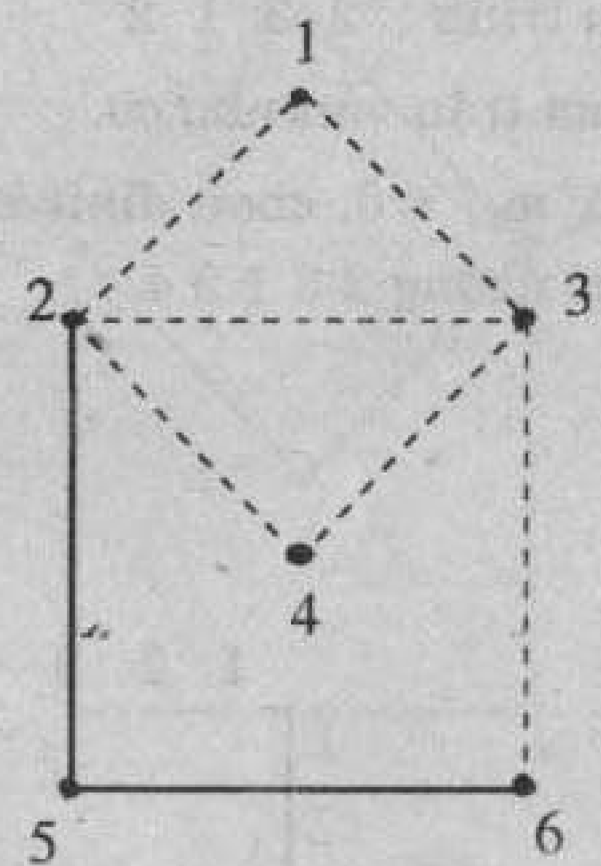
1. Nếu tồn tại 1 đỉnh của G có bậc ≤ 1 thì G không có chu trình Hamilton.
2. Nếu đỉnh x có bậc là 2 thì cả 2 cạnh tới x đều phải thuộc chu trình Hamilton.
3. Chu trình Hamilton không chứa bất kỳ chu trình con thực sự nào.
4. Trong quá trình xây dựng chu trình Hamilton, sau khi đã lấy 2 cạnh tới 1 đỉnh x đặt vào chu trình Hamilton rồi thì không thể lấy thêm cạnh nào tới x

– Xét hàng 4 , $m_{43} \neq 0$, chọn đỉnh kế tiếp là 3 và có được đường 2 3 1 2 4 3.



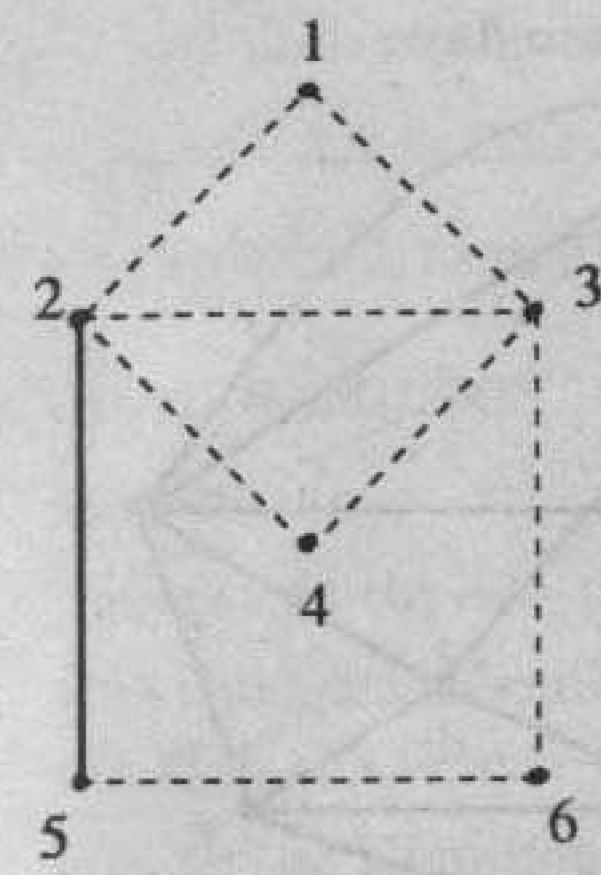
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc}1&2&3&4&5&6\end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{array} & \left[\begin{array}{cccccc} \ & \ & \ & \ & \ & \ \\ &&&&1& \\ &&&&&1 \\ &&&&& \\ &1&&&&1 \\ &&1&&1& \end{array}\right]\end{array}$$

– Xét hàng 3, $m_{36} \neq 0$, chọn đỉnh kế tiếp là 6 và có được đường 2 3 1 2 4 3 6.



$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc}1&2&3&4&5&6\end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{array} & \left[\begin{array}{cccccc} \ & \ & \ & \ & \ & \ \\ &&&&1& \\ &&&&& \\ &&&&& \\ &1&&&&1 \\ &&&&1& \end{array}\right]\end{array}$$

– Xét hàng 6, $m_{65} \neq 0$, chọn đỉnh kế tiếp là 5 và có được đường 2 3 1 2 4 3 6 5.



$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc}1&2&3&4&5&6\end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{array} & \left[\begin{array}{cccccc} \ & \ & \ & \ & \ & \ \\ &&&&1& \\ &&&&& \\ &&&&& \\ &1&&&& \\ &&&&& \end{array}\right]\end{array}$$

– Xét hàng 5, $m_{52} \neq 0$, chọn đỉnh kế tiếp là 2 và có được đường 2 3 1 2 4 3 6 5 2. Ma trận đổi thành ma trận không: giải thuật kết thúc và ta có chu trình Euler 2 3 1 2 4 3 6 5 2. □

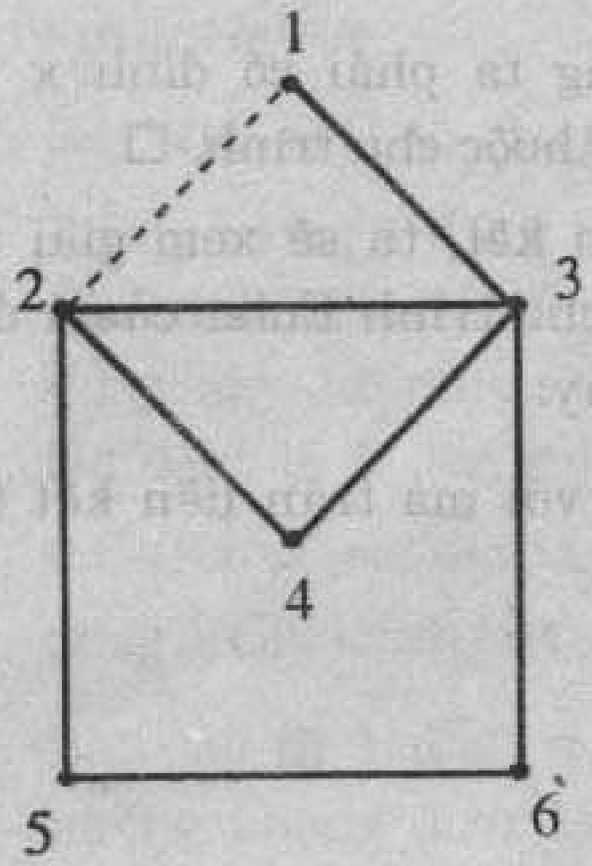
2.2.3 ĐỊNH LÝ EULER 2

Cho 1 đồ thị vô hướng G liên thông và có hơn 1 đỉnh. Thì G có đường Euler nếu và chỉ nếu G có đúng 2 đỉnh bậc lẻ.

CHỨNG MINH:

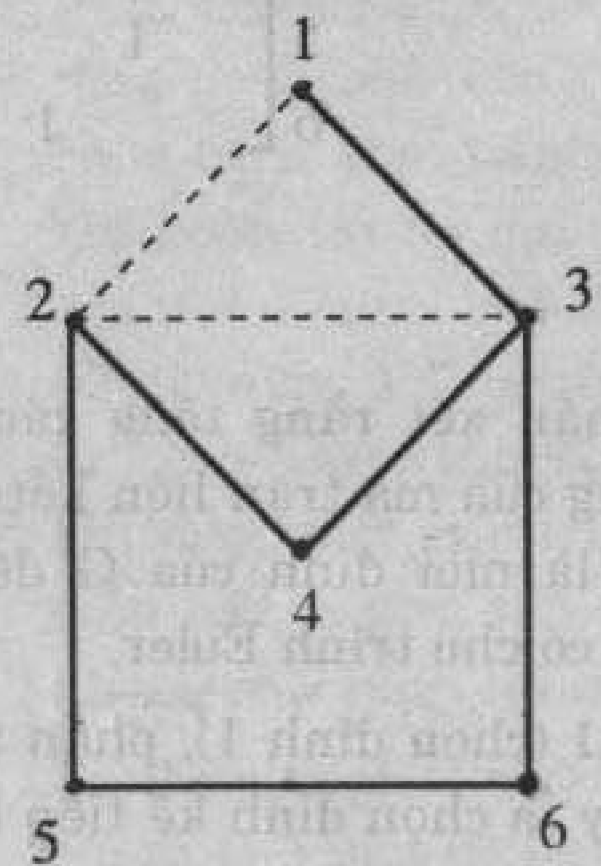
(⇒) Giả sử G có đường Euler nối đỉnh a với đỉnh b. Lập luận giống phần chứng minh trong định lý Euler 1 với nhận xét thêm rằng riêng 2 đỉnh a và b, số lần động tử rời khỏi a (đi đến b) nhiều hơn số lần động tử đi đến a (rời khỏi b) là 1. Vậy các đỉnh a và b có bậc lẻ, còn mọi đỉnh khác đều có bậc chẵn.

(⇐) Giả sử G có đúng 2 đỉnh bậc lẻ là a và b. Thêm vào G một cạnh tưởng tượng nối a với b, ta nhận được đồ thị mới G' mà mọi đỉnh của G' đều có bậc chẵn. Vậy G' có 1 chu trình Euler P'. Loại bỏ cạnh tưởng tượng $\overline{ab}$ ra khỏi P', ta nhận được P là 1 đường Euler trong G. □



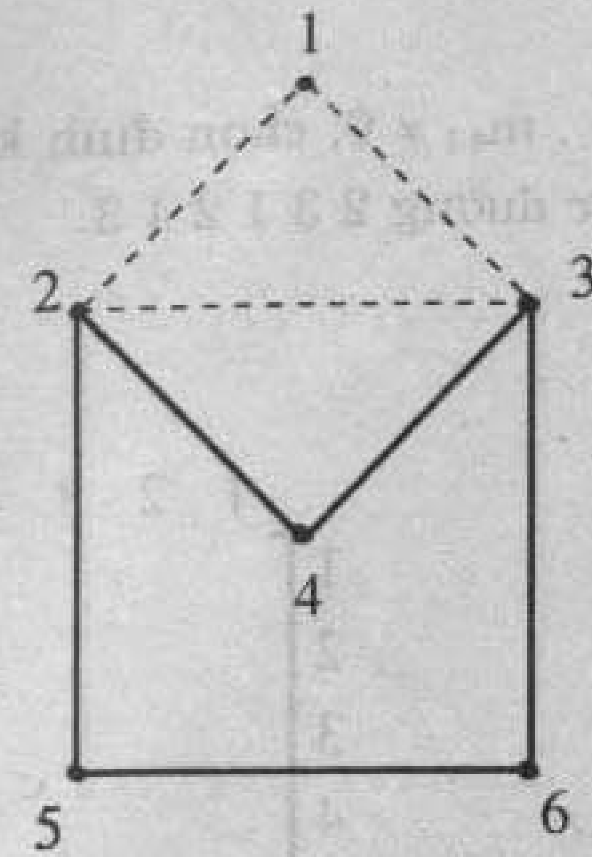
$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1&2&3&4&5&6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} &&1&&& \\ &&1&1&1& \\ 1&1&&1&&1 \\ &1&1&&& \\ &1&&&&1 \\ &&1&&1& \end{array}\right] \end{array}$$

– Xét hàng 2, $m_{23} \neq 0$, vậy chọn đỉnh kế tiếp là 3 và có được đường 1 2 3. Đồ thị và ma trận trở thành



$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1&2&3&4&5&6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} &&1&&& \\ &&&1&1& \\ 1&&&1&&1 \\ &1&1&&& \\ &1&&&&1 \\ &&1&&1& \end{array}\right] \end{array}$$

– Xét hàng 3, $m_{31} \neq 0$, chọn đỉnh kế tiếp là 1 và có được đường 1 2 3 1. Đồ thị và ma trận trở thành



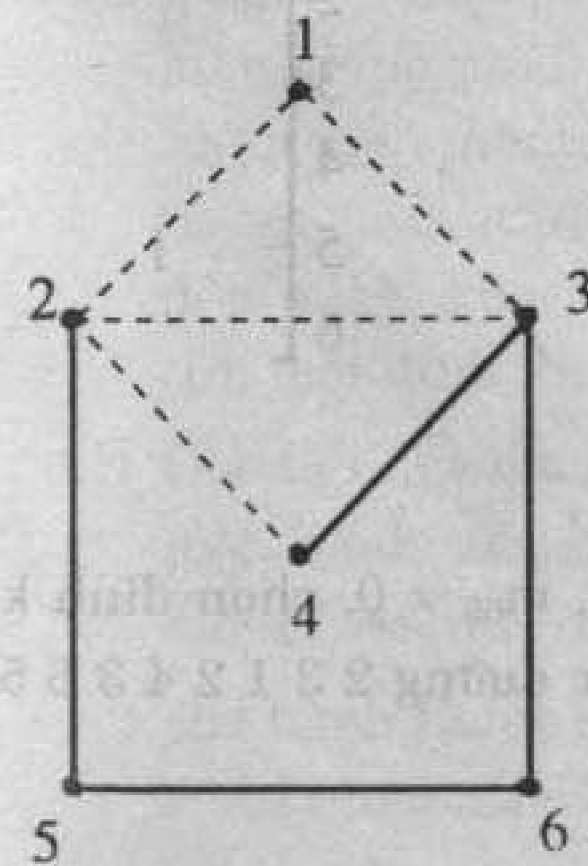
$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1&2&3&4&5&6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} &&&&& \\ &&&1&1& \\ &&&1&&1 \\ &1&1&&& \\ &1&&&&1 \\ &&1&&1& \end{array}\right] \end{array}$$

– Xét hàng 1, mọi phần tử trên hàng này đều là 0 : không thể đi tiếp được nữa. Xét đỉnh kế tiếp trong chu trình vừa tạo là đỉnh 2. Trên hàng 2, có phần tử $m_{24} \neq 0$. Vậy ta mở rộng chu trình *(breakout)* từ đỉnh 2.

Viết lại chu trình : 2 3 1 2

Đồ thị và ma trận vẫn như cũ.

– Xét hàng 2, $m_{24} \neq 0$, chọn đỉnh kế tiếp là 4 và có được đường 2 3 1 2 4.



$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1&2&3&4&5&6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} &&&&& \\ &&&&1& \\ &&&1&&1 \\ &&1&&& \\ &1&&&&1 \\ &&1&&1& \end{array}\right] \end{array}$$

CHỨNG MINH:

(⇒) Giả sử G có chu trình Euler. Xét đỉnh x.

Tưởng tượng 1 động tử khởi hành từ x, đi trên các cạnh theo chu trình Euler và dừng lại tại x sau khi đã hoàn tất chu trình Euler này. Rõ ràng số lần động tử này rời khỏi x cũng bằng số lần động tử đi đến x. Do đó d(x) chẵn.

(⇐) Giả sử mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn. Xét giải thuật xây dựng 1 chu trình trong G như sau :

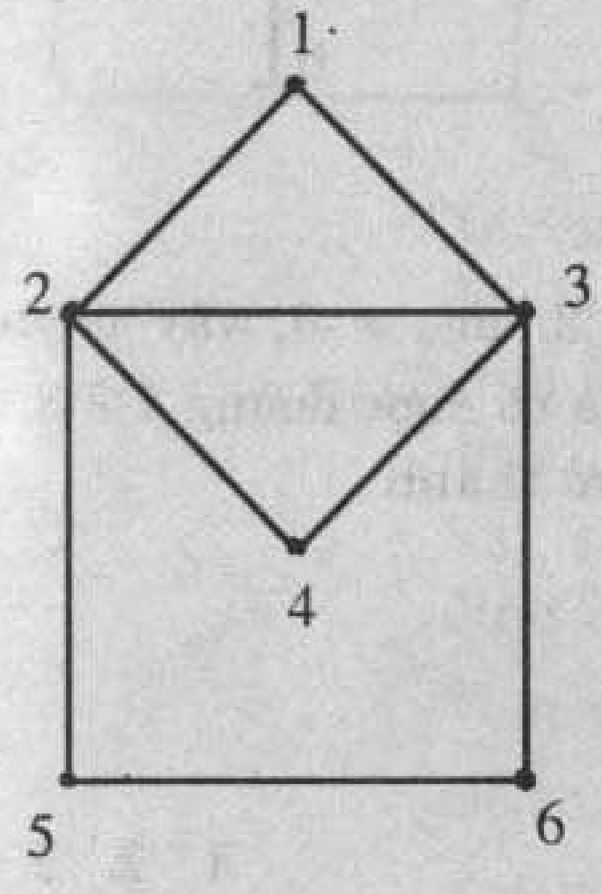
Bắt đầu từ 1 đỉnh a, đi theo các cạnh 1 cách ngẫu nhiên nhưng không được lập lại cạnh nào đã đi qua cho đến khi không thể đi tiếp được, phải dừng ở 1 đỉnh b. Lúc này mọi cạnh tới b đều đã đi qua, nếu $a \neq b$ thì dễ thấy rằng số lần đi đến b nhiều hơn số lần rời khỏi b là 1 : vô lý vì d(b) chẵn. Vậy phải có b = a. Nói cách khác khi không thể đi tiếp được là động tử đã tạo nên 1 chu trình. Nếu có 1 đỉnh c trong chu trình này là đỉnh đầu của 1 cạnh chưa đi qua thì ta sẽ mở rộng *(breakout)* chu trình này thành 1 chu trình lớn hơn bằng cách khởi hành lại từ c, đi theo chu trình cũ cho đến khi hoàn tất nó ở c, rồi tiếp tục đi theo cạnh tới c chưa đi qua nói ở trên cho đến khi không thể đi tiếp được nữa, ta sẽ tạo được 1 chu trình mới chứa chu trình cũ. Cứ tiếp tục thủ tục này : thành lập chu trình, mở rộng nó...cho đến khi được một chu trình mà không thể mở rộng được nữa, điều này xảy ra khi mọi đỉnh trong chu trình hiện có đều không còn cạnh tới nào chưa đi qua.

Ta chỉ còn phải chứng minh rằng lúc đó, chu trình hiện có chính là 1 chu trình Euler của G, nghĩa là mọi cạnh của G đều thuộc chu trình này. Thực vậy, coi cạnh e = $\overline{xy}$. Vì G liên thông nên có 1 đường nối đỉnh a với đỉnh x: $aa_1a_2....x$. Cạnh $\overline{aa_1}$ phải thuộc chu trình, vì không còn cạnh tới a nào chưa đi qua. Suy ra đỉnh a_1 phải thuộc chu trình. Lại lập luận tương tự, cạnh $\overline{a_1a_2}$ phải thuộc chu trình, suy ra a_2

thuộc chu trình,...,cuối cùng ta phải có đỉnh x thuộc [redacted] trình và do đó cạnh e cũng thuộc chu trình. □

Bây giờ dùng ma trận liên kết, ta sẽ xem giải thuật nêu trên được áp dụng để tìm chu trình Euler của 1 đồ thị như thế nào trong thí dụ sau đây:

THÍ DỤ 1: Xét đồ thị G với ma trận liên kết (các vị trí trống là số 0):



$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} & 1 & 1 & & & \\ 1 & & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & & 1 & & 1 \\ & 1 & 1 & & & \\ & 1 & & & & 1 \\ & & 1 & & 1 & \end{array}\right] \end{array}$$

Trước hết nhận xét rằng tổng các phần tử trên mỗi hàng của ma trận liên kết đều là số chẵn (nghĩa là mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn), vậy G có chu trình Euler.

– Xét hàng 1 (chọn đỉnh 1), phần tử ở cột 2 khác 0 vậy ta chọn đỉnh kế tiếp là 2 và có được đường 12.

Giảm 1 ở phần tử m_{12} (hàng 1 cột 2) và m_{21} (xóa cạnh $\overline{12}$ vừa đi qua). Đồ thị và ma trận trở thành