Đề thi môn: Phân tích và thiết kế thuật toán

(Thời gian: 90 phút – Không sử dụng tài liệu – Nộp lại đề)

Bài 1. Với mỗi khẳng định sau đây cho biết khẳng định nào là đúng, khẳng định nào là sai và giải thích câu trả lời

1a) $n^3 \notin \Theta(n^2 \log n)$.

1b) $\log n \in O(n^\alpha)$ với mọi hằng số α dương.

1c) $n^\alpha \in O(2^n)$ với mọi hằng số α dương.

Bài 2. Cho tập I gồm n đoạn thẳng trên trục số thực $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n]$. Cần tìm tập P có lực lượng nhỏ nhất gồm các điểm trên trục số thực sao cho mỗi đoạn $[a_i, b_i]$ đều chứa ít nhất một điểm nào đó thuộc P, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Xét thuật toán tham lam sau đây để giải bài toán đặt ra

GREEDY(*I*)

```
m = (min{a1, a2, ..., an} - 1);
P = ∅;
Sắp xếp các đoạn thẳng trong I theo thứ tự không giảm của mút phải b_i;
(Không giảm tổng quát giả thiết là b1 ≤ b2 ≤ ... ≤ bn)
for i = 1 to n   // lần lượt xét các đoạn theo thứ tự được sắp xếp
    if a_i > m {
        P = P ∪ {b_i};
        m = b_i;
    }
return P;  // P là tập điểm cần tìm
```

2a) Hãy chỉ ra rằng thuật toán trên có thể cài đặt với thời gian tính $O(n \log n)$.

2b) Thuật toán trên có cho lời đúng không? Giải thích câu trả lời.

Bài 3. Trình diễn thuật toán quy hoạch động tính khoảng cách sửa đổi xâu X= "ALGORITHM" thành xâu Y="ALTRUISTIC". Kết quả cuối cùng cần đưa ra khoảng cách tìm được và cách biến đổi xâu X thành xâu Y.

Bài 4. Trình diễn thuật toán Kuhn-Munkres giải bài toán phân công với ma trận hiệu quả sau đây

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 7 & 6 \\ 5 & 3 & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

Bài 5. Cho đồ thị có hướng $G = (V,E)$, tập con $E' \subseteq E$ được gọi là tập cung ngược (Feedback Arc Set) nếu như sau khi loại bỏ các cung trong E' khỏi đồ thị G ta thu được đồ thị không có chu trình. Bài toán tập cung ngược (FAS) được phát biểu như sau: Cho đồ thị có hướng $G = (V,E)$ và số nguyên không âm k, hỏi có thể tìm được tập cung ngược với lực lượng không vượt quá k hay không?

5a) Hãy chỉ ra bài toán FAS là thuộc lớp NP;

5b) Chứng minh rằng bài toán FAS thuộc lớp NP-khó. (Gợi ý: Qui dẫn bài toán phủ đỉnh (Vertex Cover) về FAS)

Đề thi môn: Thiết kế và Phân tích thuật toán

(Thời gian: 90 phút – Không sử dụng tài liệu – Nộp lại đề)

Bài 1. Giả sử $T(n)$ được xác định bởi công thức đệ qui sau đây

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1, \\ T(\lfloor n/2 \rfloor) + n^2 & n \geq 2. \end{cases}$$

1a) Chứng minh rằng $T(n) \leq \frac{4}{3}n^2,\ \forall n \geq 1$.

1b) Sử dụng kết quả 1a) hãy chứng minh $T(n) = \Theta(n^2)$.

Bài 2. Xét bài toán **PointCover** sau: Cho $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ là tập gồm n điểm trên trục số thực. Cần tìm tập với lực lượng nhỏ nhất S các đoạn thẳng có độ dài 1 sao cho mỗi điểm của tập A đều thuộc vào ít nhất một đoạn trong S (Ta nói tập S là phủ các điểm trong A). Hãy chứng minh tính đúng đắn hoặc đưa ra phản ví dụ cho các thuật toán tham lam sau đây để giải bài toán đặt ra:

Thuật toán PC1: Gọi I là đoạn độ dài 1 phủ được nhiều điểm trong S nhất. Bổ sung I vào S. Sau đó lặp lại một cách đệ qui thao tác vừa mô tả với tập các điểm trong A chưa được phủ bởi I.

Thuật toán PC2: Gọi a_j là số nhỏ nhất trong A. Bổ sung đoạn $I = [a_j, a_j+1]$ vào S. Sau đó lặp lại một cách đệ qui thao tác vừa mô tả với tập các điểm trong A chưa được phủ bởi I.

Bài 3. Hãy sửa lại giả mã DFS_Visit(u) trong thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu trên đồ thị (xem mô tả ở dưới) để nó đưa ra danh sách tất cả các cạnh của đồ thị cùng với loại của mỗi cạnh.

```
DFS(G)
for u ∈ V[G]
    color[u] =white
    p[u] =  nil
time = 0
for u ∈ V[G]
    if color[u] = white
        DFS_Visit(u)
```

```
DFS_Visit(u)
color[u] = gray
d[u]  =  ++time
for v ∈ Adj[u]
        if color[v] = white
            p[v]= u
            DFS_Visit(v)
color[u]= black
f[u] = ++ time
```

Bài 4. Xét bài toán **AcycGraph**: "Hỏi đơn đồ thị vô hướng $G=(V,E)$ có chứa chu trình hay không". Chỉ được phép sử dụng truy vấn dạng "Hai đỉnh i và j có kề nhau hay không?"

4a) Sử dụng lập luận phản biện, hãy đánh giá cận dưới cho độ phức tạp thời gian của bài toán AcycGraph.

4b) Hãy đưa ra đánh giá độ phức tạp thời gian của bài toán AcycGraph với giả thiết chỉ được sử dụng truy vấn đã nêu đối với đồ thị.

Bài 5. Xét *bài toán đường đi đổi màu,* ký hiệu là (**CPath**), sau đây: "Cho đồ thị có hướng $G = (V,E)$ với n đỉnh và m cạnh, trong đó mỗi cạnh $e \in E$ được gán cho một trong L màu $c_1, c_2, \ldots, c_L$. Cho s là đỉnh xuất phát, t là đỉnh đích, $s, t \in V$; còn B là số nguyên dương. Hỏi có tồn tại hay không đường đi đơn trong G từ đỉnh s đến đỉnh t không sử dụng nhiều hơn B cạnh cùng màu?"

5a) Chứng minh rằng (CPATH) thuộc lớp NP.

5b) Hỏi (**CPath**) có phải là bài toán NP-đầy đủ hay không?

Đề thi môn: Phân tích và thiết kế thuật toán

(Thời gian: 90 phút – Không sử dụng tài liệu – Nộp lại đề)

Bài 1. Giải các công thức đệ qui sau đây

1a) $T(1) = 1$; $T(n) = 3\,T(n/2) + n \log_2 n$, $n \geq 2$.

1b) $T(1) = 1$; $T(n) = 4\,T(n/2) + n^{5/2}$, $n \geq 2$.

(Gợi ý: Áp dụng định lý thợ tổng quát).

Bài 2. Xét bài toán lập lịch sau đây: Tại thời điểm 0, cần lập lịch thực hiện n công việc $a_1, a_2, \ldots, a_n$ trên một máy. Đối với mỗi công việc a_j ta biết: t_j là thời gian cần thiết để thực hiện, p_j – là tiền thưởng và d_j là thời hạn hoàn thành. Tại mỗi thời điểm máy chỉ có thể thực hiện không quá một công việc, và mỗi công việc phải được thực hiện liên tục trên máy từ lúc bắt đầu cho đến khi hoàn thành, không được phép ngắt quãng. Nếu công việc a_j được hoàn thành không muộn hơn thời điểm d_j (tức là nó được hoàn thành đúng hạn) thì ta thu được tiền thưởng là p_j, còn nếu trái lại tiền thưởng thu được là bằng 0. Hãy phát triển thuật toán tìm lịch thực hiện các công việc đem lại tổng tiền thưởng là lớn nhất. Giả thiết rằng: t_j là số nguyên và $1 \leq t_j \leq n$, với mọi $j = 1, 2, \ldots, n$. Chứng minh tính đúng đắn và đánh giá thời gian tính của thuật toán đề xuất.

Bài 3. Trình diễn phương pháp qui hoạch động giải bài toán tìm trình tự tối ưu tính tích của dãy ma trận $A_1A_2A_3A_4A_5$ với dãy kích thước là $\{4, 10, 3, 12, 20, 7\}$.

Yêu cầu: Đưa ra các bảng ghi nhận kết quả giải các bài toán con. Kết quả cuối cùng cần đưa ra số phép nhân ít nhất cần thực hiện và trình tự nhân tối ưu tìm được.

Bài 4. Cho biết các khẳng định sau đây là đúng hay sai. Nếu câu trả lời là đúng, hãy đưa ra chứng minh, còn nếu trái lại hãy đưa ra phản ví dụ.

4a) Nếu trong quá trình thực hiện tìm kiếm theo chiều sâu trên đơn đồ thị có hướng $G = (V, E)$ thuật toán chỉ đưa ra cạnh vòng thì đồ thị G là không chứa chu trình.

4b) Nếu đơn đồ thị có hướng $G = (V, E)$ là không chứa chu trình thì có thể chỉ ra thứ tự duyệt đỉnh cho các vòng lặp duyệt đỉnh trong thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu để thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu chỉ đưa ra cạnh vòng.

Bài 5. Trước hết nhắc lại là: Ta nói hai đơn đồ thị vô hướng $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ là đẳng cấu nếu như tồn tại song ánh $f: V_1 \to V_2$ sao cho $(u, v) \in E_1 \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E_2$. Xét bài toán đồ thị con đẳng cấu (SGISO) sau đây: "Cho hai đơn đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ và $H = (V_H, E_H)$. Hỏi đồ thị G có chứa đồ thị con đẳng cấu với đồ thị H hay không?"

5a) Chứng minh rằng SGISO là thuộc vào lớp NP.

5b) Chứng minh rằng SGISO là thuộc vào lớp NP-đầy đủ. (Có thể sử dụng bất cứ bài toán NP-đầy đủ đã giới thiệu trong bài giảng để qui dẫn bài toán SGISO).

Đề thi môn: Phân tích và thiết kế thuật toán

(Thời gian: 90 phút – Không sử dụng tài liệu – Nộp lại đề)

Bài 1. Xét thuật toán đệ qui sau đây

```
RecSum(A, p, q)
// A là mảng chứa các số nguyên
    if (p == q) then return A[p];
    mid = ⌊(p+q)/2 ⌋
    return RecSum(A, p,mid) + RecSum(A,mid + 1, q);
```

1a) Lệnh gọi RecSum(A, 1, n) trả lại thông tin gì liên quan đến mảng A[1..n]? Chứng minh khẳng định đề xuất.

1b) Đánh giá thời gian tính của việc thực hiện RecSum(A, 1, n).

Bài 2. Trong những năm 1980, khi dung lượng đĩa cứng còn rất hạn hẹp và rất đắt, người ta thường phải cất giữ các file ra băng từ. Băng từ chỉ cho phép truy cập tuần tự, nghĩa là để truy cập đến một file trên băng từ ta không thể định vị đầu đọc trực tiếp đến vị trí đầu file mà phải đưa đầu đọc về đầu băng từ và lần lượt đọc qua những file ghi phía trước để định vị đầu đọc đến vị trí đầu file cần đọc.

Giả sử ta có n file: $F_1, F_2, \dots, F_n$ được ghi trên băng từ theo thứ tự liệt kê. File F_i có độ dài l_i và xác suất truy cập là p_i ($0 < p_i < 1$, $i = 1, 2, ..., n$; $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$) Do đặc tính truy cập tuần tự của băng từ, thời gian để đọc file F_i khi các file được ghi trên đĩa theo thứ tự đã nêu là $P_i = \sum_{j=1}^{i} l_j$. Vì thế *thời gian kỳ vọng* để đọc file khi các file được ghi theo thứ tự $F_1, F_2, \dots, F_n$ là $\sum_{i=1}^{n}\left(p_i \sum_{j=1}^{i} l_j\right)$.

Có tất cả n! trình tự mà theo đó ta có thể ghi n file đã cho lên băng từ. Trình tự ghi file được gọi là tối ưu nếu như theo trình tự này, thời gian kỳ vọng truy cập file là nhỏ nhất. Đối với mỗi thuật toán tham lam sau đây hoặc chứng minh là thuật toán cho trình tự tối ưu hoặc chỉ ra là nó không đưa ra trình tự tối ưu bằng việc đưa ra phản ví dụ:

2a) Lần lượt ghi các file lên băng từ theo thứ tự tăng dần của độ dài.

2b) Lần lượt ghi các file lên băng từ theo thứ tự giảm dần của xác suất truy cập.

2c) Lần lượt ghi các file lên băng từ theo thứ tự tăng dần của tỷ số l_i/p_i.

Bài 3. Cho dãy số $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, và số nguyên k, trong đó $1 \le k \le n$. Bài toán đặt ra là: Trong số tất cả các đoạn chứa ít ra là k phần tử của dãy A tìm đoạn $[x, y]$ có độ dài nhỏ nhất (độ dài của đoạn $[x, y]$ là $y - x$).

Ví dụ: Nếu $A = \{3.1, 6.2, 10, 5.8, 1.0, 2.2, 6.0, 7.3\}$ và $k = 4$, thì đoạn có độ dài nhỏ nhất cần tìm là [5.8, 7.3] có độ dài 1.5, chứa các điểm{5.8, 6.0, 6.2, 7.3}.

Hãy phát triển thuật toán giải bài toán đặt ra và đánh giá thời gian tính của thuật toán đề xuất.

Bài 4. Trình diễn thuật toán giải bài toán phân công với ma trận hiệu quả sau đây:

$$W = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 6 & 7 \\ 8 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 5 & 6 & 3 \\ 8 & 6 & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

Bài 5. Trước hết nhắc lại là: Ta nói hai đơn đồ thị vô hướng $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ là đẳng cấu nếu như tồn tại song ánh $f: V_1 \to V_2$ sao cho $(u, v) \in E_1 \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E_2$. Xét bài toán đồ thị con đẳng cấu (SGISO) sau đây: "Cho hai đơn đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ và $H = (V_H, E_H)$. Hỏi đồ thị G có chứa đồ thị con đẳng cấu với đồ thị H hay không?"

5a) Chứng minh rằng SGISO là thuộc vào lớp NP.

5b) Chứng minh rằng SGISO là thuộc vào lớp NP-đầy đủ. (Có thể sử dụng bất cứ bài toán NP-đầy đủ đã giới thiệu trong bài giảng để qui dẫn bài toán SGISO).

Đề thi môn: Thiết kế và Phân tích thuật toán

(Thời gian: 90 phút – Không sử dụng tài liệu – Nộp lại đề)

Bài 1. Gọi $T(n)$ là thời gian tính của thuật toán **Need** mô tả (dưới dạng tựa C) sau đây:

```
Need(int n) {
      if ( n < 1 ) return 0;
      for( i = 1 ; i ≤ n ; i + + )
            for( j = 1 ; j ≤ n ; j + + )
                  print("*");
      Need(n-3)}
```

1a) Đưa ra công thức đệ qui cho $T(n)$.

1b) Sử dụng phương pháp lặp chứng minh rằng $T(n) = \Theta(n^3)$.

Bài 2. Cho hai tập đoạn thẳng R và B, trong đó $R = \{I_1, I_2, ..., I_n\}$ là tập các đoạn thẳng được tô màu đỏ, còn $B = \{J_1, J_2, ..., J_m\}$ là tập các đoạn thẳng được tô màu xanh. Mỗi đoạn thẳng K được xác định bởi hai số nguyên $a(K)$ và $b(K)$ là đầu mút trái và đầu mút phải của đoạn thẳng K, nghĩa là $K = [a(K), b(K)]$. Ta nói đoạn thẳng màu đỏ I_i là phủ đoạn thẳng màu xanh J_j nếu mọi điểm của đoạn thẳng J_j đều thuộc I_i. Bài toán đặt ra là hãy tìm tập con các đoạn thẳng màu đỏ có lực lượng nhỏ nhất sao cho mỗi đoạn thẳng màu xanh được phủ bởi ít nhất một đoạn thẳng màu đỏ trong tập các đoạn thẳng đỏ được chọn. Giả sử bài toán là luôn có lời giải.

2a) Xét thuật toán tham lam ICov sau đây:

Algorithm ICov
$S = \varnothing$; // S là tập các đoạn thẳng cần chọn
repeat
    Chọn đoạn thẳng màu đỏ phủ được nhiều đoạn màu xanh nhất và bổ sung nó vào tập S;
    Loại bỏ khỏi tập các đoạn thẳng màu xanh B tất cả các đoạn thẳng đã được phủ;
until $B=\varnothing$;
S là tập cần tìm.

Hãy đưa ra phản ví dụ cho thấy thuật toán **Icov** không luôn cho lời giải tối ưu.

2b) Phát triển thuật toán tìm lời giải tối ưu cho bài toán đặt ra. Chứng minh tính đúng đắn và đánh giá thời gian tính của thuật toán đề xuất.

Bài 3. Trình diễn phương pháp qui hoạch động giải bài toán tìm trình tự tối ưu tính tích của dãy ma trận $A_1A_2A_3A_4A_5$ với dãy kích thước là {4, 10, 3, 12, 20, 7}.

Yêu cầu: Đưa ra các bảng ghi nhận kết quả giải các bài toán con. Kết quả cuối cùng cần đưa ra số phép nhân ít nhất cần thực hiện và trình tự nhân tối ưu tìm được.

Bài 4. Cho biết các khẳng định sau đây là đúng hay sai. Nếu câu trả lời là đúng, hãy đưa ra chứng minh, còn nếu trái lại hãy đưa ra phản ví dụ.

4a) Nếu trong quá trình tìm kiếm theo chiều sâu trên đơn đồ thị có hướng $G = (V, E)$ ta chỉ phát hiện ra cạnh của cây và cạnh vòng thì đồ thị G là không chứa chu trình.

4b) Nếu đơn đồ thị có hướng $G = (V, E)$ là không chứa chu trình thì có thể đưa ra thứ tự duyệt đỉnh trong các vòng lặp duyệt đỉnh của thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu để thuật toán chỉ đưa ra cạnh của cây và cạnh vòng.

Bài 5. Xét bài toán (P) sau đây: Cho hai đơn đồ thị vô hướng $G_1=(V_1, E_1)$ và $G_2=(V_2, E_2)$ với $|V_1| = |V_2|$ và $k = |E_1| - |E_2| > 0$, hỏi có thể loại bỏ k cạnh khỏi G_1 để thu được đồ thị đẳng cấu với G_2 hay không? (Ta nói hai đồ thị là đẳng cấu nếu có cách đặt lại tên cho các đỉnh của đồ thị này để thu được đồ thị kia.) Cho biết mệnh đề nào trong các mệnh đề sau đây là đúng và chứng minh mệnh đề được lựa chọn:

5a) Bài toán (P) là NP-đầy đủ.
5b) Bài toán (P) có thể giải được bởi thuật toán thời gian tính đa thức.
5c) Cả hai mệnh đề trên đều sai.